ALGEBRA II

Prof.ssa Patrizia Longobardi

A.A. 2009/2010

I appello - 3 febbraio 2010

Esercizio 1. - Sia F un campo e si consideri l' usuale F-spazio vettoriale $F^3 = \{(a, b, c) | a, b, c \in F\}$. Con $h, k \in F$, si considerino i vettori $v_1 = (2, 2, h)$, $v_2 = (9, 4, 4)$ e $v_3 = (3, 18, 3)$, $v_4 = (1, k, 6)$ ed i sottospazi $W = \langle v_1, v_2 \rangle$ e $V = \langle v_3, v_4 \rangle$ di F^3 .

- In funzione di h, di k e della caratteristica di F: si discutano la dimensione di W e quella di V; si individui quando il sottospazio $W + V$ coincide con F^3, precisando quando tale somma è diretta.
- Posto $U = \langle v_2, v_3 \rangle = \langle (9, 4, 4), (3, 18, 3) \rangle$, si descrivano gli elementi di U e, in funzione della caratteristica di F: si determini la dimensione di U, si precisi quando la posizione $\psi((a, b, c) + U) = b + 2c$ definisce un'applicazione ψ di F^3/T in F, provando poi che in tal caso l'applicazione è un omomorfismo di F-spazi vettoriali, e studiando quando è iniettivo, quando è suriettivo, e in caso di isomorfismo, individuandone l'inverso.

Esercizio 2. - Si considerino i polinomi

$$f(x) = 105x^5 + 10x^4 + 11x^2 + 17 \in \mathbb{Z}_p[x] \text{ e } g(x) = x^2 + 21x + 1 \in \mathbb{Z}_p[x].$$

Distinguendo i casi: $p = 2$, $p = 3$, $p = 5$, $p = 7$,

(I) si decompongano $f(x)$ e $g(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili di $\mathbb{Z}_p[x]$;

(II) si determini di $f(x)$ un campo di spezzamento E rispetto a $\mathbb{Z}_p$, precisandone l' ordine, il grado $|E : \mathbb{Z}_p|$ e due $\mathbb{Z}_p$-basi;

(III) si determini di $g(x)$ un campo di spezzamento K rispetto a $\mathbb{Z}_p$, precisandone l' ordine, il grado $|K : \mathbb{Z}_p|$ e due $\mathbb{Z}_p$-basi;

(IV) Considerato l' anello quoziente $\mathbb{Z}_p[x]/(f(x))$ si precisi, in funzione di $p \in \{2, 3, 5, 7\}$, se tale anello è isomorfo a $\mathbb{Z}_p[x]/(g(x))$, se contiene un sottoanello isomorfo a $\mathbb{Z}_p[x]/(g(x))$, se ammette un quoziente isomorfo a $\mathbb{Z}_p[x]/(g(x))$.