ALGEBRA II

Prof.ssa Patrizia Longobardi

A.A. 2010/2011

I appello - 8 febbraio 2011

Esercizio 1. - Sia F un campo e si consideri l' usuale F-spazio vettoriale $F^4 = \{(a, b, c, d)|a, b, c, d \in F\}$. Con $h, k \in F$, si considerino i vettori $v_1 = (3, 2, 0, h)$, $v_2 = (4, 6, 1, 0)$ e $v_3 = (0, 0, 2, 5)$, $v_4 = (1, 2, 0, 6)$, $v_5 = (2, 0, k, 6)$ ed i sottospazi $W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ e $V = \langle v_4, v_5 \rangle$ di F^4 .

- In funzione di h, di k e della caratteristica di F: si discutano la dimensione di W e quella di V; si individui quando il sottospazio $W + V$ coincide con F^4, e si precisi quando si ha $W + V = W \oplus V$ e quando, in particolare, si ha $F^4 = W \oplus V$.
- Posto $U = \langle v_2, v_3, v_4 \rangle = \langle (4, 6, 1, 0), (0, 0, 2, 5), (1, 2, 0, 6) \rangle$, si descrivano gli elementi di U, si determini la dimensione di U e, in funzione della caratteristica di F: si precisi quando la posizione $\psi((a, b, c, d)+U) = a + b - c + d$ definisce un'applicazione ψ di F^4/U in F, provando poi che in tal caso l'applicazione è un isomorfismo di F-spazi vettoriali e individuandone l'inverso.

Esercizio 2. - Si consideri il polinomio

$$f(x) = 105x^8 + 7x^5 + 36x^4 + 10x^3 + 85x^2 + x + 85 \in \mathbb{Z}_p[x].$$

Distinguendo i casi: $p = 2$, $p = 3$, $p = 5$, $p = 7$,

(I) si decomponga $f(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili di $\mathbb{Z}_p[x]$;

(II) si determini di $f(x)$ un campo di spezzamento E rispetto a $\mathbb{Z}_p$, precisandone l' ordine, il grado $|E : \mathbb{Z}_p|$ e due $\mathbb{Z}_p$-basi;

(III) posto $J = (f(x))$, dell'anello $\mathbb{Z}_p[x]/J$ si caratterizzino gli elementi invertibili, i divisori dello zero, gli elementi nilpotenti.

Posto sempre $J = (f(x))$, si precisi per quali valori di $p \in \{2, 3, 5, 7\}$ il laterale $(x - 3) + J$ è invertibile nell'anello $\mathbb{Z}_p[x]/J$ e se ne determini l'inverso almeno in un caso.

Infine si discuta se, per $p = 2$, nel campo di spezzamento E di $f(x)$ su $\mathbb{Z}_2$ c'è una radice del polinomio :

(i) $g(x) = x^4 + x^3 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$;

(ii) $h(x) = x^3 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$;

(iii) $k(x) = x^5 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$;

(iv) $l(x) = x^5 + x^4 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$.