

## ALGEBRA II

I Appello - 8 febbraio 2012

A.A. 2011/2012

1 - Sia  $F$  un campo e si consideri l' usuale  $F$ -spazio vettoriale

$$F^4 = \{(a, b, c, d) | a, b, c, d \in F\}.$$

Con  $h, k \in F$ , si considerino i vettori  $v_1 = (1, 2, h, 0)$ ,  $v_2 = (0, 3, 4, 4)$ ,  $v_3 = (2, 0, 6, 4)$ ,  $v_4 = (3, 6, 5, 2)$ ,  $v_5 = (0, 5, 4, k)$  ed i sottospazi  $W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$  e  $V = \langle v_4, v_5 \rangle$  di  $F^4$ .

(I) In funzione di  $h$ , di  $k$  e della caratteristica di  $F$ :

- si discutano la dimensione di  $W$  e la dimensione di  $V$ ;
- si determinino un supplementare di  $W$  e un supplementare di  $V$ ;
- si individui quando il sottospazio  $W + V$  coincide con  $F^4$ , e si precisi quando tale somma è diretta.

(II) Posto  $U = \langle v_3, v_4 \rangle = \langle (2, 0, 6, 4), (3, 6, 5, 2) \rangle$ , si descrivano gli elementi di  $U$  e, in funzione della caratteristica di  $F$ :

- si determini la dimensione di  $U$ ;
- si verifichi che la posizione  $\psi((a, b, c, d) + U) = (a - c + d, 3d - 6a + 2b)$  definisce un'applicazione  $\psi$  di  $F^4/U$  in  $F^2$  e che tale applicazione è un omomorfismo di  $F$ -spazi vettoriali, sempre suriettivo, e si precisi quando è iniettivo individuandone, in tal caso, l'inverso.

2 - Si consideri il polinomio

$$f(x) = 15x^7 + 21x^5 + 20x^4 + 7x^3 + 3x^2 + 35 \in \mathbb{Z}_p[x].$$

Distinguendo i casi:  $p = 2$ ,  $p = 3$ ,  $p = 5$ ,  $p = 7$ ,

- (I) si decomponga  $f(x)$  nel prodotto di fattori irriducibili di  $\mathbb{Z}_p[x]$ ;
- (II) si determini di  $f(x)$  un campo di spezzamento  $E$  rispetto a  $\mathbb{Z}_p$ , precisandone l'ordine, il grado  $[E : \mathbb{Z}_p]$  e due  $\mathbb{Z}_p$ -basi;
- (III) posto  $J = (f(x))$ , dell'anello  $\mathbb{Z}_p[x]/J$  si caratterizzino gli elementi invertibili, i divisori dello zero, gli elementi nilpotenti.  
Posto sempre  $J = (f(x))$ , si precisi per quali valori di  $p \in \{2, 3, 5, 7\}$  il laterale  $(x + 1) + J$  è invertibile nell'anello  $\mathbb{Z}_p[x]/J$  e se ne determini l'inverso almeno in un caso.