ALGEBRA II

I Appello - 30 gennaio 2013

A.A. 2012/2013

1 - Sia F un campo e si consideri l' usuale F-spazio vettoriale

$$F^3 = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in F\}.$$

Con $h, k \in F$, si considerino i vettori $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (0, 4, h)$, $v_3 = (0, 3, k)$, $v_4 = (2, 3, 5)$ ed i sottospazi $W = \langle v_1, v_2 \rangle$ e $V = \langle v_3, v_4 \rangle$ di F^3.

(I) Si discuta, in funzione della caratteristica di F, se esistono valori di h per cui $(2, 7, 4)$ appartiene a W.

(II) In funzione di h, di k e della caratteristica di F:

- si discutano la dimensione di W e la dimensione di V;
- si determinino un supplementare di W e un supplementare di V;
- si individui quando il sottospazio $W + V$ coincide con F^3, e si precisi quando tale somma è diretta.

(III) Posto $U = \langle v_1, v_3 \rangle = \langle (1, 2, 3), (0, 3, k) \rangle$, si descrivano gli elementi di U e, in funzione di k e della caratteristica di F:

- si determini la dimensione di U;
- si verifichi quando la posizione $\psi((a, b, c) + U) = a + b - c$ definisce un'applicazione ψ di F^3/U in F e in tal caso si provi che tale applicazione è un epimorfismo di F-spazi vettoriali. Si studi poi quando è iniettivo e, in tal caso, si precisi l'inverso.

2 - Sia K un campo e sia $A = K[x]/(x^2 + x + b)$, con $b \in K$.

Si precisi in funzione di b quando A risulta un campo e si caratterizzi tale soluzione nei casi

$$K = \quad \mathbb{R}, \quad \mathbb{Q}, \quad \mathbb{Z}_2, \quad \mathbb{Z}_3, \quad \mathbb{Z}_5.$$

Si determini l'unico valore di p e di b perché, in $\mathbb{Z}_p[x]$, risulti $x^2 + x + b$ divisore del polinomio

$$f(x) = x^5 + x^4 + x + 1 \in \mathbb{Z}_p[x].$$

Distinguendo i casi: $p = 2$, $p = 3$, $p = 5$, $p = 7$,

(I) si decomponga $f(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili di $\mathbb{Z}_p[x]$;

(II) si determini di $f(x)$ un campo di spezzamento E rispetto a $\mathbb{Z}_p$, precisandone l' ordine, il grado $|E : \mathbb{Z}_p|$ e, se esistono, due $\mathbb{Z}_p$-basi.