ALGEBRA II

I Appello - 4 febbraio 2014

A.A. 2013/2014

1 - Sia F un campo e si consideri l'usuale F-spazio vettoriale

$$F^4 = \{(a,b,c,d) \mid a,b,c,d \in F\}.$$

Con $h,k \in F$, si considerino i vettori $v_1 = (3,2,1,0)$, $v_2 = (2,0,2,h)$, $v_3 = (6,5,8,1)$, $v_4 = (5,4,1,0)$, $v_5 = (2,0,6,k)$ ed i sottospazi $W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ e $V = \langle v_4, v_5 \rangle$ di F^4 .

(I) In funzione di h, di k e della caratteristica di F:

- si discutano la dimensione di W e la dimensione di V;
- si determinino un supplementare di W e un supplementare di V;
- si individui quando si ha $F^4 = W \oplus V$.

(II) Supposto $carF = 2$, si discuta, in funzione di h e di k, la dimensione di $W \cap V$.

(III) Posto $U = \langle v_1, v_3, v_4 \rangle = \langle (3,2,1,0), (6,5,8,1), (5,4,1,0) \rangle$, si descrivano gli elementi di U e:

- si determini, in funzione della caratteristica di F, la dimensione di U;
- si verifichi che la posizione $\psi((a,b,c,d) + U) = a - b - c + 7d$ definisce un'applicazione ψ di F^4/U in F e che tale applicazione è un omomorfismo di F-spazi vettoriali, sempre suriettivo. In funzione della caratteristica di F si precisi $dim(Ker\psi)$.

2 - Si consideri il polinomio

$$f(x) = 25x^6 + 6x^4 + 19x^3 + 3x^2 + 13x + 17 \in \mathbb{Z}_p[x].$$

(I) Distinguendo i casi: $p = 2$, $p = 3$, $p = 5$,

(i) si decomponga $f(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili di $\mathbb{Z}_p[x]$;

(ii) si determini di $f(x)$ un campo di spezzamento E rispetto a $\mathbb{Z}_p$, precisandone l'ordine, il grado $|E : \mathbb{Z}_p|$ e due $\mathbb{Z}_p$-basi;

(iii) nel caso $p = 5$, si precisi una decomposizione in fattori di primo grado di $f(x)$ in $E[x]$.

(II) Si fattorizzi in $\mathbb{R}[x]$ il polinomio $g(x) = x^7 - 6x^6 + 14x^5 - 19x^4 + 16x^3 - 16x^2 + 16x - 12$, sapendo che in $\mathbb{C}$ ammette la radice doppia $1 + i$.