ALGEBRA II

Prof.ssa Patrizia Longobardi

A.A. 2009/2010

I appello (bis) - 10 febbraio 2010

Esercizio 1. - Sia F un campo e si consideri l' usuale F-spazio vettoriale $F^4 = \{(a,b,c,d)|a,b,c,d \in F\}$. Con $h,k \in F$, si considerino i vettori $v_1 = (2,1,4,h)$, $v_2 = (9,15,18,0)$ e $v_3 = (10,0,2,12)$, $v_4 = (1,0,k,6)$ ed i sottospazi $W = \langle v_1, v_2 \rangle$ e $V = \langle v_3, v_4 \rangle$ di F^4 .

- In funzione di h, di k e della caratteristica di F: si discutano la dimensione di W e quella di V; si provi che è sempre $dim(W+V) \geq 2$ e si determini quando $dim(W+V) \geq 3$.
- Posto $U = \langle v_2, v_3 \rangle = \langle (9,15,18,0),(10,0,2,12) \rangle$, si descrivano gli elementi di U e, in funzione della caratteristica di F: si determini la dimensione di U, si precisi quando la posizione $\psi((a,b,c,d)+U) = 2a - c + d$ definisce un'applicazione ψ di F^4/U in F, provando poi che in tal caso l'applicazione è un omomorfismo di F-spazi vettoriali, e studiando quando è iniettivo, quando è suriettivo, e in caso di isomorfismo, individuandone l'inverso.

Esercizio 2. - Si consideri il polinomio

$$f(x) = x^7 + 91x^5 + 85x^3 + 85x^2 + 105 \in \mathbb{Z}_p[x]$$

Distinguendo i casi: $p = 2$, $p = 3$, $p = 5$, $p = 7$,

(I) si decomponga $f(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili di $\mathbb{Z}_p[x]$;

(II) si determini di $f(x)$ un campo di spezzamento E rispetto a $\mathbb{Z}_p$, precisandone l' ordine, il grado $|E : \mathbb{Z}_p|$ e due $\mathbb{Z}_p$-basi;

(III) posto $J = (f(x))$, dell'anello $\mathbb{Z}_p[x]/J$ si caratterizzino gli elementi invertibili, i divisori dello zero, gli elementi nilpotenti. Si precisi per quali valori di $p \in \{2,3,5,7\}$ il laterale $(x-2)+J$ è invertibile nell'anello $\mathbb{Z}_p[x]/J$ e se ne determini l'inverso. Infine si individui il valore di p per cui risulti -1 radice di $f(x)$.