ALGEBRA II

Prof.ssa Patrizia Longobardi

A.A. 2002/2003

II appello – 13 febbraio 2003

Esercizio 1. Sia B un campo e si consideri l'usuale spazio vettoriale

$$B^4 = \{(a,b,c,d) | a,b,c,d \in B\}.$$

– Si verifichi che l'applicazione

$$\varphi : (a,b,c,d) \in B^4 \mapsto (a-3c, 2b-4d, 10a, 6b) \in B^4$$

è un B–endomorfismo di B^4. Si determinino, in funzione della caratteristica di B, il nucleo $Ker\varphi$ e l'immagine $Im\varphi$, precisando di ciascuno la dimensione, due basi (se esistono), un supplementare.

– Si provi poi che la posizione

$$\psi((a,b,c,d) + Ker\varphi) = a - 2b - 3c + 4d$$

definisce un'applicazione di $B^4/Ker\varphi$ in B e che tale applicazione è un epimorfismo di B–spazi vettoriali, precisando se esiste qualche valore di $carB$ per cui ψ risulti un isomorfismo.

Esercizio 2. Si considerino tutti i polinomi monici di secondo grado in $Z_3[x]$, e di ciascuno di essi si determinino una decomposizione in fattori irriducibili ed un campo di spezzamento su Z_3.

Considerato poi il polinomio $f(x) = x^5 - 1 \in Z_3[x]$, si determinino un suo campo di spezzamento K su Z_3 e gli elementi di K radici di $f(x)$ (in particolare si osservi che K ha ordine 81 e che è di periodo 5 in $(K^*, \cdot)$ un qualunque elemento $c \in K \setminus \{1\}$ radice di $f(x)$.) Si studino infine il gruppo $Gal(f(x)/Z_3)$ ed il reticolo dei sottocampi di K, precisando di ciascuno gli elementi.