ALGEBRA II

Prof.ssa Patrizia Longobardi

A.A. 2003/2004

II appello – 1 marzo 2004

Esercizio 1. Sia B un campo e si scriva ogni polinomio $g(x)$ di $B[x]$ come opportuna serie formale

$$\sum_{i \in N_0} b_i x^i$$

(dove $\{i \in N_0 |\, b_i \neq 0\}$ è finito).

– Si dimostri che l'applicazione

$$\varphi : \sum_{i \in N_0} b_i x^i \in B[x] \mapsto b_0 \in B$$

è un epimorfismo degli usuali B-spazi vettoriali $B[x]$ e B, si studi il nucleo $Ker\varphi$ di φ e se ne individui un supplementare. Si studi se φ è anche un epimorfismo di anelli e se $Ker\varphi$ è un ideale dell'anello $B[x]$.

– Si dimostri che l'applicazione

$$\psi : \sum_{i \in N_0} b_i x^i \in B[x] \mapsto b_1 \in B$$

è un epimorfismo degli usuali B-spazi vettoriali $B[x]$ e B, si studi il nucleo $Ker\psi$ di ψ e se ne individui un supplementare. Si studi se ψ è anche un epimorfismo di anelli e se $Ker\psi$ è un ideale dell'anello $B[x]$.

– Si dimostri che l'applicazione

$$\sigma : \sum_{i \in N_0} b_i x^i \in B[x] \mapsto 2b_0 + 6b_1 \in B$$

è un omomorfismo degli usuali B-spazi vettoriali $B[x]$ e B, e si studi σ in funzione della caratteristica di B, precisando in particolare quando è suriettiva, quando un omomorfismo di anelli, quando il nucleo $Ker\sigma$ è un ideale dell'anello $B[x]$.

Esercizio 2. Sia F un campo, e si consideri il polinomio $f(x) = x^4 - 7 \in F[x]$. In ciascuno dei seguenti casi:

$$F = Q,\ F = R,\ F = Z_2,\ F = Z_3,\ F = Z_5,\ F = Z_7,\ F = Z_{11}$$

si determinino una decomposizione di $f(x)$ in fattori irriducibili di $F[x]$, un campo di spezzamento K di $f(x)$ su F, il grado $|K : F|$, l'ordine di un gruppo di Galois G di $f(x)$ su F. In particolare, nei casi

$$F = Z_5 \text{ e } F = Z_{11},$$

si precisino anche la struttura e gli elementi di un gruppo di Galois G di $f(x)$ su F, ed il reticolo dei sottocampi di K.