Prova scritta di ALGEBRA II
A.A. 2005/2006
Prof.ssa Patrizia Longobardi

II appello – 2 marzo 2006

Esercizio 1. Sia F un campo e si consideri l' usuale F-spazio vettoriale

$$F^4 = \{(a,b,c,d) | a,b,c,d \in F\}.$$

– Si verifichi che l' applicazione $\varphi : (a,b,c,d) \in F^4 \to (a+3b, 2d-c, d) \in F^3$ è un F-omomorfismo dello spazio vettoriale F^4 nello spazio vettoriale F^3 e se ne determinino il nucleo $Ker\varphi$ e l' immagine $Im\varphi$, precisandone la dimensione ed una base.

– Si considerino i sottospazi

$$W = \langle (1,0,4,0), (0,3,5,0), (5,4,1,0) \rangle \text{ e } U = \langle (1,0,2,0), (-1,3,5,11), (5,4,1,0) \rangle.$$

Si determini la dimensione di ciascuno di essi, in funzione della caratteristica di F, e si precisi quando i due sottospazi sono tra loro supplementari.

– Supposto infine $carF = 11$, si provi che la posizione $\Phi((a,b,c,d)+W) = (d, a+5b-3c)$ definisce un' applicazione Φ di F^4/W in F^2, che tale applicazione un isomorfismo di F-spazi vettoriali, e di essa si determini linversa.

Esercizio 2. Sia B un campo e si consideri il polinomio

$$f(x) = 175x^6 + x^3 + 1 \in B[x].$$

Supposto $B = \mathbb{Z}_p$ e distinguendo i casi: $p = 2$, $p = 3$, $p = 5$, $p = 7$,

(I) si decomponga $f(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili di $\mathbb{Z}_p[x]$;

(II) posto $J = (f(x))$, dell'anello $\mathbb{Z}_p[x]/J$ si caratterizzino gli elementi invertibili, i divisori dello zero, gli elementi nilpotenti;

(III) si determini un campo di spezzamento E di $f(x)$ rispetto a $\mathbb{Z}_p$, precisandone l'ordine, il grado $|E : \mathbb{Z}_p|$ e una $\mathbb{Z}_p$ -base.

Si verifichi poi che il polinomio $g(x) = x^3 + 1 \in B[x]$ ammette una radice doppia in B se e solo se si ha $carB = 3$.