

ALGEBRA II

PROF.SSA PATRIZIA LONGOBARDI

A.A. 2006/2007

II APPELLO – 21 FEBBRAIO 2007

Esercizio 1. Siano F un campo e si consideri l'usuale F -spazio vettoriale $F^3 = \{(a, b, c) | a, b, c \in F\}$.

- (i) Si verifichi che l'applicazione $\varphi : (a, b, c) \in F^3 \rightarrow (a + 2b + 8c, -a - 2b + 7c) \in F^2$ è un F -omomorfismo dello spazio vettoriale F^3 nello spazio vettoriale F^2 .
 - Si determinino, in funzione della caratteristica di F , il nucleo $\text{Ker}\varphi$ e l'immagine $\text{Imm}\varphi$ di φ , precisandone la dimensione ed una base, ed esibendo di ciascuno un supplementare.
- (ii) Supposto $\text{car}F = 2$, si provi che la posizione $\Psi((a, b, c) + \text{Ker}\varphi) = (a + c, c)$ definisce un'applicazione Ψ di $F^3/\text{Ker}\varphi$ in F^2 , che tale applicazione è un isomorfismo di F -spazi vettoriali, e di essa si determini l'inversa.

Esercizio 2. Si considerino i polinomi $f(x) = x^7 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ e $g(x) = x^7 + x \in \mathbb{Z}_2[x]$.

- (a) Si determini il massimo comun divisore $k(x) \in \mathbb{Z}_2[x]$ di $f(x)$ e $g(x)$.
- (b) Si decompongano $f(x)$ e $g(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili di $\mathbb{Z}_2[x]$.
- (c) Si determini un campo di spezzamento E di $f(x)$ rispetto a \mathbb{Z}_2 , precisandone l'ordine, il grado $|E : \mathbb{Z}_2|$ ed una \mathbb{Z}_2 -base.
- (d) Si determini un campo di spezzamento K di $g(x)$ rispetto a \mathbb{Z}_2 , precisandone l'ordine, il grado $|K : \mathbb{Z}_2|$ ed una \mathbb{Z}_2 -base.
- (e) Posti $J_1 = (f(x))$ e $J_2 = (g(x))$, degli anelli $\mathbb{Z}_2[x]/J_1$ e $\mathbb{Z}_2[x]/J_2$ si caratterizzino gli elementi invertibili, i divisori dello zero, gli elementi nilpotenti.
- (f) Si precisi se gli \mathbb{Z}_2 -spazi vettoriali $\mathbb{Z}_2[x]/J_1$ e $\mathbb{Z}_2[x]/J_2$ sono isomorfi, e se lo sono gli anelli $\mathbb{Z}_2[x]/J_1$ e $\mathbb{Z}_2[x]/J_2$ (individuandone, eventualmente, un isomorfismo).
- (g) Si determinino, se esistono, gli ideali massimali di $\mathbb{Z}_2[x]/J_1$ e $\mathbb{Z}_2[x]/J_2$.