ALGEBRA II

Prof.ssa Patrizia Longobardi

A.A. 2007/2008

II appello– 20 febbraio 2008

Esercizio 1. Siano F un campo e si consideri l'usuale F-spazio vettoriale $F^4 = \{(a, b.c, d)|a, b, c, d \in F\}$. Si considerino i vettori $v_1 = (-2, 4, 0, 4)$, $v_2 = (0, -2, 6, 6)$, $v_3 = (1, -1, 2, 4)$ ed il sottospazio $W = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ di F^4.

– Si discuta la dimensione di W in funzione della caratteristica di F.

– Si determinino, sempre in funzione della caratteristica di F, un sottospazio V ed un sottospazio L tali che: $F^4 = W \oplus V$, $F^4 = W + L$ somma non diretta.

– Posto $U = \langle v_3\rangle$, si provi che la posizione

$$\psi((a, b, c, d) + U) = a + b + 2c - d$$

definisce un'applicazione ψ di F^4/U in F e che tale applicazione è un epimorfismo di F-spazi vettoriali. Si determini poi $Ker\psi$.

Esercizio 2.

(I) Si verifichi che gli unici polinomi irriducibili monici di II grado in $\mathbb{Z}_3[x]$ sono:

$$p_1(x) = x^2 + 1,\ \ p_2(x) = x^2 + x + 2,\ \ p_3(x) = x^2 + 2x + 2.$$

(II) Si consideri il polinomio $f_{a,b}(x) = x^5 + ax^3 + bx + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$.

(i) Si determinino i valori delle coppie $(a, b) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ per cui $f_{a,b}(x)$ ammette radici in $\mathbb{Z}_3$; in particolare si individuino le coppie (a, b) tali che $f_{a,b}(x)$ ha radici doppie.

(ii) Si determinino i valori delle coppie $(a, b) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ per cui $f_{a,b}(x)$ ammette un fattore irriducibile di II grado.

(iii) Si precisino i valori delle coppie $(a, b) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ per cui $f_{a,b}(x)$ è irriducibile in $\mathbb{Z}_3[x]$.

(iv) Si decomponga $f_{a,b}(x)$ in fattori irriducibili e se ne determini un campo di spezzamento E rispetto a $\mathbb{Z}_3$, precisandone l'ordine, il grado $|E : \mathbb{Z}_3|$ e due $\mathbb{Z}_3$- basi nei seguenti casi: $(a, b) = (0, 1)$, $(a, b) = (2, 2)$, $(a, b) = (1, 2)$, $(a, b) = (2, 1)$, $(a, b) = (0, 2)$, $(a, b) = (2, 0)$.