ALGEBRA II

Prof.ssa Patrizia Longobardi

A.A. 2008/2009

II appello – 18 febbraio 2009

Esercizio 1. - Sia F un campo e si consideri l'usuale F-spazio vettoriale $F^3 = \{(a,b,c)|a,b,c \in F\}$. Con $h,k \in \mathbb{Z}$ e 1_F unità di F, si considerino i vettori $v_1 = (0,1,h1_F)$, $v_2 = (3,4,0)$, $v_3 = (0,k1_F,3)$, $v_4 = (2,1,0)$ ed i sottospazi $W = \langle v_1, v_2 \rangle$ e $V = \langle v_3, v_4 \rangle$ di F^3 .

(I) In funzione di h e k e della caratteristica di F :
- si discuta la dimensione di W e quella di V ;
- si individui quando il sottospazio $W + V$ coincide con F^3 ;
- si precisi quando si ha $W + V = W \oplus V$ e quando, in particolare, si ha $F^3 = W \oplus V$.

(II) Posto $w_1 = (0,1,2)$, $w_2 = (3,4,0)$, si consideri il sottospazio $U = \langle w_1, w_2 \rangle$ di F^3 .
- Si determini la dimensione di U.
- Si individui, in funzione della caratteristica di F , quando U è un sottoanello dell'anello prodotto F^3 , quando un ideale.
- Si precisi quando la posizione $\psi((a,b,c)+U) = a - 6b + 3c$ definisce un'applicazione ψ di F^3/U in F ; in tal caso si provi che tale applicazione è un omomorfismo di F-spazi vettoriali. Si discuta poi se è biettiva e, in caso positivo, se ne determini l'inversa. Infine si precisi se, e eventualmente quando, ψ è anche un omomorfismo di anelli.

Esercizio 2. - Si consideri il polinomio

$$f(x) = x^5 + 3x^3 + 5x^2 + 11x + 35 \in \mathbb{Z}_p[x].$$

Distinguendo i casi: $p = 2$, $p = 3$, $p = 5$, $p = 7$, $p = 11$,

(I) si decomponga $f(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili di $\mathbb{Z}_p[x]$;

(II) si determini di $f(x)$ un campo di spezzamento E rispetto a $\mathbb{Z}_p$, precisandone l'ordine, il grado $|E : \mathbb{Z}_p|$ e due $\mathbb{Z}_p$-basi;

(III) si discuta se, per $p = 3$, nel campo di spezzamento E di $f(x)$ su $\mathbb{Z}_3$ c' è una radice del polinomio

$$(i)\ \ g(x) = x^3 + x^2 + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]; \quad (ii)\ \ h(x) = x^4 + x^3 + 2 \in \mathbb{Z}_3[x];$$

$$(iii)\ \ k(x) = x^4 + x^3 + x + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]; \quad (iv)\ \ l(x) = x^5 + x^2 + 2 \in \mathbb{Z}_3[x].$$