ALGEBRA II

Prof.ssa Patrizia Longobardi

A.A. 2009/2010

II appello - 24 febbraio 2010

Esercizio 1. - Sia F un campo e si consideri l' usuale F-spazio vettoriale $F^4 = \{(a,b,c,d)|a,b,c,d \in F\}$. Con $h \in F$, si considerino i vettori $v_1 = (1,0,2,0)$, $v_2 = (0,3,0,9)$ e $v_3 = (15,0,9,0)$, $v_4 = (0,5,0,15)$, $v_5 = (9,0,10,h-1)$ ed i sottospazi $W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ e $V = \langle v_4, v_5 \rangle$ di F^4 .

- In funzione di h e della caratteristica di F: si discutano la dimensione di W e quella di V; si determinino un supplementare di W e un supplementare di V; si individui quando i sottospazi W e V sono supplementari, quando $W \cap V \neq \{0\}$, ed infine si precisi $dim_F(W \cap V)$.
- Posto $U = \langle v_1, v_2 \rangle = \langle (1,0,2,0), (0,3,0,9) \rangle$, se ne descrivano gli elementi e: si determini la dimensione di U, si verifichi che la posizione $\psi((a,b,c,d)+U) = (2a-c, 3b-d)$ definisce un'applicazione ψ di F^4/U in F^2, che tale applicazione è un omomorfismo di F-spazi vettoriali, e si studi quando è iniettivo, quando è suriettivo, e in caso di isomorfismo, se ne precisi l'inverso.

Esercizio 2. - Si considerino i polinomi

$$f(x) = 3x^5 + 7x^4 + 12x^3 + 8x^2 + 6x + 15 \in \mathbb{Z}_p[x] \text{ e } g(x) = 8x^4 + 9x^3 + 13x^2 + 11x + 4 \in \mathbb{Z}_p[x].$$

Distinguendo i casi: $p = 2$, $p = 3$, $p = 5$,

(I) si decompongano nel prodotto di fattori irriducibili di $\mathbb{Z}_p[x]$ i polinomi $f(x)$ e $g(x)$, e di ciascuno di essi si determini un campo di spezzamento rispetto a $\mathbb{Z}_p$, precisandone l' ordine, il grado rispetto a $\mathbb{Z}_p$ e due $\mathbb{Z}_p$-basi;

(II) si determini un massimo comun divisore $d(x)$ dei polinomi $f(x)$ e $g(x)$; posto poi $J = (d(x))$, si studi l'anello quoziente $\mathbb{Z}_p[x]/J$.