ALGEBRA II

Prof.ssa Patrizia Longobardi

A.A. 2010/2011

II appello - 23 febbraio 2011

Esercizio 1. - Sia F un campo e si consideri l' usuale F-spazio vettoriale $F^3 = \{(a,b,c)|a,b,c \in F\}$. Con $h,k \in F$, si considerino i vettori $v_1 = (1,2,h)$, $v_2 = (12,6,0)$ e $v_3 = (3,18,3)$, $v_4 = (k,3,4)$, $v_5 = (6,14,22)$ ed i sottospazi $W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ e $V = \langle v_4, v_5 \rangle$ di F^3 .

- In funzione di h, di k e della caratteristica di F: si discutano la dimensione di W e quella di V; si determinino un supplementare di W e un supplementare di V; si individui quando il sottospazio $W+V$ coincide con F^3, e si precisi quando tale somma è diretta.
- Posto $U = \langle v_2, v_5 \rangle = \langle (12,6,0), (6,14,22) \rangle$, si descrivano gli elementi di U e, in funzione della caratteristica di F: si determini la dimensione di U, si verifichi che la posizione $\psi((a,b,c)+U) = a - 2b + c$ definisce un'applicazione ψ di F^3/U in F, che tale applicazione è un omomorfismo di F-spazi vettoriali, e si studi quando è iniettivo, quando è suriettivo e, in caso di isomorfismo, se ne precisi l'inverso.

Esercizio 2. - Sia p un primo. Con $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_p$ si consideri il polinomio

$$g_{\alpha,\beta}(x) = 15x^5 + 6x^4 + \alpha x^2 + 7x + \beta \in \mathbb{Z}_p[x].$$

In funzione di p, α e β si individui quando tale polinomio ammette 1 come radice doppia.
Sia ora $f(x) = g_{13,7}(x) = 15x^5 + 6x^4 + 13x^2 + 7x + 7 \in \mathbb{Z}_p[x]$.

Distinguendo i casi: $p = 2$, $p = 3$, $p = 5$, $p = 7$,

(I) si decomponga $f(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili di $\mathbb{Z}_p[x]$;

(II) si determini di $f(x)$ un campo di spezzamento E rispetto a $\mathbb{Z}_p$, precisandone l' ordine, il grado $|E : \mathbb{Z}_p|$ e due $\mathbb{Z}_p$-basi;

Posto $J = (f(x))$, si precisi per quali valori di $p \in \{2,3,5,7\}$ il laterale $(x-7)+J$ è invertibile nell'anello $\mathbb{Z}_p[x]/J$, determinandone l'inverso, e quando è un divisore dello zero.