ALGEBRA II

II Appello - 22 febbraio 2012

A.A. 2011/2012

1 - Sia F un campo e si consideri l' usuale F-spazio vettoriale

$$F^4 = \{(a, b, c, d) \mid a, b, c, d \in F\}.$$

Con $h, k \in F$, si considerino i vettori $v_1 = (1, 4, 3, 0)$, $v_2 = (h, 5, 0, 2)$, $v_3 = (2, 0, 6, 5)$, $v_4 = (4, 9, 0, 7)$, $v_5 = (2, k, k, 5)$ ed i sottospazi $W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ e $V = \langle v_4, v_5 \rangle$ di F^4 .

(I) In funzione di h, di k e della caratteristica di F:

- si discutano la dimensione di W e la dimensione di V;
- si determinino un supplementare di W e un supplementare di V;
- si individui quando si ha $F^4 = W \oplus V$.

(II) Posto $U = \langle v_3, v_4 \rangle = \langle (2, 0, 6, 5), (4, 9, 0, 7) \rangle$, si descrivano gli elementi di U e, in funzione della caratteristica di F:

- si determini la dimensione di U;
- si verifichi quando la posizione $\psi((a, b, c, d)+U) = (9a-3c-4b, 2d-5a+c)$ definisce un'applicazione ψ di F^4/U in F^2 e in tal caso si provi che tale applicazione è un omomorfismo di F-spazi vettoriali. Si studi poi quando è suriettivo, quando iniettivo e, in caso d'isomorfismo, si precisi l'inverso.

2 - Si consideri il polinomio

$$f(x) = 105x^7 + 5x^6 + 120x^3 + 21x^2 + 15x + 35 \in \mathbb{Z}_p[x].$$

Distinguendo i casi: $p = 2$, $p = 3$, $p = 5$, $p = 7$,

(I) si decomponga $f(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili di $\mathbb{Z}_p[x]$;

(II) si determini di $f(x)$ un campo di spezzamento E rispetto a $\mathbb{Z}_p$, precisandone l'ordine, il grado $|E : \mathbb{Z}_p|$ e due $\mathbb{Z}_p$-basi;

(III) posto $J = (f(x))$, dell'anello $\mathbb{Z}_p[x]/J$ si caratterizzino gli elementi invertibili, i divisori dello zero, gli elementi nilpotenti.

Posto sempre $J = (f(x))$, si precisi per quali valori di $p \in \{2, 3, 5, 7\}$ il laterale $x + J$ è invertibile nell'anello $\mathbb{Z}_p[x]/J$ e se ne determini l'inverso almeno in un caso.