ALGEBRA II

II Appello - 13 febbraio 2013

A.A. 2012/2013

1 - Sia F un campo e si consideri l' usuale F-spazio vettoriale

$$F^4 = \{(a, b, c, d) \mid a, b, c, d \in F\}.$$

Con $h, k \in F$, si considerino i vettori $v_1 = (0, 2, 5, 6)$, $v_2 = (2, h, 1, 4)$, $v_3 = (0, 9, 6, 5)$, $v_4 = (k, 1, 4, 3)$ ed i sottospazi $W = \langle v_1, v_2 \rangle$ e $V = \langle v_3, v_4 \rangle$ di F^4.

(I) In funzione di h, di k e della caratteristica di F:

- si discutano la dimensione di W e la dimensione di V;
- si determinino un supplementare di W e un supplementare di V;
- si individui quando si ha $F^4 = W \oplus V$.

(II) Considerato il vettore $y = (t, 3, 6, 10) \in F$ e supposto $car\ F \neq 7$, si determini, in funzione di h, di t e di $car\ F$, quando y appartiene a W.

(III) Posto $U = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle (0, 2, 5, 6), (2, h, 1, 4), (0, 9, 6, 5) \rangle$, si descrivano gli elementi di U e, in funzione di h e della caratteristica di F:

- si determini la dimensione di U;
- si verifichi quando la posizione $\psi((a, b, c, d)+U) = (b+2c-d, a)$ definisce un'applicazione ψ di F^4/U in F^2 e in tal caso si provi che tale applicazione è un isomorfismo di F-spazi vettoriali, precisandone anche l'inversa.

2 - Sia K un campo e sia $A = K[x]/(x^3 + x + b)$, con $b \in K$.

(I) Si precisi in funzione di b quando A risulta un campo e si caratterizzi tale soluzione nei casi

$$K = \quad \mathbb{R}, \quad \mathbb{Q}, \quad \mathbb{Z}_2, \quad \mathbb{Z}_3, \quad \mathbb{Z}_5.$$

(II) Si determini l'unico valore di p e di b perché, in $\mathbb{Z}_p[x]$, risulti $x^3 + x + b$ divisore del polinomio $f(x) = x^6 + 5x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_p[x]$.

Distinguendo i casi: $p = 2$, $p = 3$, $p = 5$,

(i) si decomponga $f(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili di $\mathbb{Z}_p[x]$;

(ii) si determini di $f(x)$ un campo di spezzamento E rispetto a $\mathbb{Z}_p$, precisandone l' ordine, il grado $|E : \mathbb{Z}_p|$ e, se esistono, due $\mathbb{Z}_p$-basi.