ALGEBRA II

Prof.ssa Patrizia Longobardi

A.A. 2006/2007

II appello straordinario 14 novembre 2007

Esercizio 1. Siano F un campo e $F^3 = \{(a, b.c)|a, b, c \in F\}$ l'usuale F-spazio vettoriale.

– Si considerino i sottospazi $W = \langle(3, 1, 4), (6, 2, 3), (1, 4, 1)\rangle$ e $U = \langle(1, 2, 3), (6, 2, 8)\rangle$. Si determinino di ciascuno di essi, in funzione della caratteristica di F, la dimensione ed una base, e si precisi poi quando i sottospazi sono tra loro supplementari.
– Con $a \in F$, si consideri poi il sottospazio $V = \langle(1, 1, 3), (3, 2, 5), (5, 3, a)\rangle$. Si determinino i valori di a per cui risulti sempre $dimV = 3$.
– Infine, supposto $carF \neq 5$ e considerato il sottospazio $H = \langle(1, -1, 2), (3, 2, 1)\rangle$, si verifichi che la posizione

$$\varphi((a, b, c) + H) = a - b - c$$

definisce un'applicazione φ di F^3/H in F, che tale applicazione è un isomorfismo di F-spazi vettoriali, e di essa si determini l'inversa.

Esercizio 2. Sia B un campo e si consideri il polinomio

$$f(x) = 105x^5 + x^4 + 21x^3 + 9x^2 + 7x + 15 \in B[x].$$

Supposto $B = \mathbb{Z}_p$ e distinguendo i casi casi:

$$p = 2,\ \ p = 3,\ \ p = 5,\ \ p = 7,$$

(I) si decomponga $f(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili di $\mathbb{Z}_p[x]$;
(II) posto $J = (f(x))$, dell'anello $\mathbb{Z}_p[x]/J$ si caratterizzino gli elementi invertibili, i divisori dello zero, gli elementi nilpotenti;
(III) si determini un campo di spezzamento E di $f(x)$ rispetto a $\mathbb{Z}_p$, precisandone l'ordine, il grado $|E : \mathbb{Z}_p|$ ed una $\mathbb{Z}_p$–base.