ALGEBRA II

Prof.ssa Patrizia Longobardi

A.A. 2007/2008

II appello straordinario – 12 novembre 2008

Esercizio 1. - Sia F un campo e si consideri l'usuale F-spazio vettoriale $F^4 = \{(a, b, c, d)|a, b, c, d \in F\}$. Si considerino i vettori $v_1 = (0, 1, 6, 2)$, $v_2 = (2, 3, 4, 0)$, $v_3 = (6, 5, 0, 10)$ ed il sottospazio $W = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ di F^4.

– In funzione della caratteristica di F si discuta la dimensione di W e si determinino due basi e, se esistono, due supplementari .

– Posto $U = \langle v_1\rangle = \langle(0, 1, 6, 2)\rangle$, si descrivano gli elementi di U e si provi che la posizione:

$$\psi((a, b, c, d) + U) := (2b - d, c - 3d, a)$$

definisce un'applicazione ψ di F^4/U in F^3 e che tale applicazione un omomorfismo di F-spazi vettoriali; qualora ψ sia biettiva, se ne determini l'inversa.

Esercizio 2. - Si consideri il polinomio

$$f(x) = 15x^6 + 31x^5 + 13x^4 + 3x^3 + 8x^2 + 7 \in \mathbb{Z}_p[x].$$

(I) Distinguendo i casi: $p = 2$, $p = 3$, $p = 7$,

– si decomponga $f(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili di $\mathbb{Z}_p[x]$;

– si determini di $f(x)$ un campo di spezzamento E rispetto a $\mathbb{Z}_p$, precisandone l'ordine, il grado $|E : \mathbb{Z}_p|$ e due $\mathbb{Z}_p$-basi; in particolare, nel caso $p = 2$, si giustifichi perchè si ha $|E| = 16$ e si individui in E una radice del polinomio $x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$;

– posto $J = (f(x))$, dell'anello $\mathbb{Z}_p[x]/J$ si caratterizzino gli elementi invertibili, i divisori dello zero, gli elementi nilpotenti.

(II) Si precisi per quali valori di p , 1 è radice di $f(x)$. Si individui poi il valore di p per cui 1 è radice multipla di $f(x)$ ed il valore di p per cui lo è 1.