ALGEBRA II

Prof.ssa Patrizia Longobardi

A.A. 2008/2009

II appello straordinario - 17 novembre 2009

Esercizio 1. - Sia F un campo e si consideri l' usuale F-spazio vettoriale $F^3 = \{(a, b, c)|a, b, c \in F\}$. Con $k \in F$ si considerino i vettori $v_1 = (2, k, 3)$, $v_2 = (-1, 0, 1)$ e $v_3 = (k, 4, 1)$ ed i sottospazi $W = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$, $U = \langle v_1, v_2\rangle$, $V = \langle v_2, v_3\rangle$ di F^3 .

- In funzione di k e della caratteristica di F: si discuta la dimensione di W, quella di U, quella di V; si individuino due basi di W, due di U, due di V;
- Si consideri il sottospazio $T = \langle v_2\rangle = \langle(-1, 0, 1)\rangle$ di F^3. Si descrivano gli elementi di T e se ne determini la dimensione. Si verifichi che la posizione $\psi((a, b, c) + T) = (b, a + c)$ definisce un'applicazione ψ di F^3/T in F^2 e si provi che l'applicazione è un isomorfismo di F-spazi vettoriali, precisandone anche l'inversa.

Esercizio 2. - Si consideri il polinomio

$$f(x) = 15x^5 + 7x^4 + 14x^3 + 6x^2 + 70x + 7 \in \mathbb{Z}_p[x].$$

Distinguendo i casi: $p = 2$, $p = 3$, $p = 5$, $p = 7$,

(I) si decomponga $f(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili di $\mathbb{Z}_p[x]$;

(II) si determini di $f(x)$ un campo di spezzamento E rispetto a $\mathbb{Z}_p$, precisandone l' ordine, il grado $|E : \mathbb{Z}_p|$ e due $\mathbb{Z}_p$-basi;

(III) posto $J = (f(x))$, dell' anello $\mathbb{Z}_p[x]/J$ si caratterizzino gli elementi invertibili, i divisori dello zero, gli elementi nilpotenti.

Posto ancora $J = (f(x))$, si precisi per quali valori di $p \in \{2, 3, 5, 7\}$ il laterale $(x - 3) + J$ è invertibile nell' anello $\mathbb{Z}_p[x]/J$ e se ne determini l'inverso.