

ALGEBRA II

PROF.SSA PATRIZIA LONGOBARDI

A.A. 2010/2011

II APPELLO STRAORDINARIO - 29 NOVEMBRE 2011

Esercizio 1. - Sia F un campo e si consideri l'usuale F -spazio vettoriale $F^3 = \{(a, b, c) | a, b, c \in F\}$. Con $h \in F$, si considerino i vettori $v_1 = (1, 2, h)$, $v_2 = (2, 4, 8)$ e $v_3 = (6, 5, 3)$, $v_4 = (3, h, 2)$, ed i sottospazi $W = \langle v_1, v_2 \rangle$ e $V = \langle v_3, v_4 \rangle$ di F^3 .

- In funzione di h e della caratteristica di F : si discutano la dimensione di W e quella di V ; si determinino un supplementare di W e un supplementare di V ; si individui quando il sottospazio $W + V$ coincide con F^3 , e si precisi quando tale somma è diretta.
- Posto $U = \langle v_2, v_3 \rangle = \langle (2, 4, 8), (6, 5, 3) \rangle$, si descrivano gli elementi di U e, in funzione della caratteristica di F : si determini la dimensione di U , si verifichi quando la posizione $\psi((a, b, c) + U) = 2a + b - c$ definisce un'applicazione ψ di F^3/U in F , e si provi poi che in tal caso l'applicazione è un epimorfismo di F -spazi vettoriali. Infine si studi quando è iniettivo e, in caso di isomorfismo, se ne precisi l'inverso.

Esercizio 2. - Si consideri il polinomio

$$f(x) = x^6 + 5x^5 + 7x^4 + 21x^3 + 3x^2 + x + 7 \in \mathbb{Z}_p[x].$$

Distinguendo i casi: $p = 2$, $p = 3$, $p = 5$, $p = 7$,

- si decomponga $f(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili di $\mathbb{Z}_p[x]$;
- si determini di $f(x)$ un campo di spezzamento E rispetto a \mathbb{Z}_p , precisandone l'ordine, il grado $|E : \mathbb{Z}_p|$ e due \mathbb{Z}_p -basi;
- Posto $J = (f(x))$, dell'anello $\mathbb{Z}_p[x]/J$, si caratterizzino gli elementi invertibili, i divisori dello zero, gli elementi nilpotenti. Posto sempre $J = (f(x))$, si precisi per quali valori di $p \in \{2, 3, 5, 7\}$ il laterale $(x - 3) + J$ è invertibile nell'anello $\mathbb{Z}_p[x]/J$ e se ne determini l'inverso.