

ALGEBRA II

PROF.SSA PATRIZIA LONGOBARDI

A.A. 2002/2003

III APPELLO – 11 GIUGNO 2003

Esercizio 1. Sia B un campo e si fissino i polinomi $h(x), k(x) \in B[x]$. Si consideri l'applicazione

$$\varphi : f(x) \in B[x] \mapsto h(x)f(x) + k'(x) \in B[x].$$

- Si individui la condizione cui deve soddisfare $k(x)$ perché φ sia un endomorfismo dell'usuale B -spazio vettoriale $B[x]$, e si descriva un tale $k(x)$.
- Supposto poi φ B -endomorfismo, lo si studi in funzione di $h(x)$, determinandone il nucleo e l'immagine, e quindi precisandone le eventuali iniettività e/o suriettività.
- Posto infine $h(x) = x^3 + 2x^2 + 5x + 1$, $k(x) = 3x^2 - 8x - 3$, si determinino, in funzione della caratteristica di B , la dimensione e una base del sottospazio

$$H = \langle h(x), k(x), h^{(n)}(x), k^{(s)}(x) \mid n, s \geq 1 \rangle$$

generato da $h(x)$, $k(x)$, e dalle loro derivate r -esime, $r \geq 1$.

Esercizio 2. Sia F un campo, e si consideri il polinomio $f(x) = x^3 - 2 \in F[x]$. In ciascuno dei seguenti casi:

$$F = \mathbb{Z}_2, \quad F = \mathbb{Z}_3, \quad F = \mathbb{Z}_5, \quad F = \mathbb{Z}_7, \quad F = \mathbb{Q}, \quad F = \mathbb{R},$$

si determinino una decomposizione di $f(x)$ in fattori irriducibili di $F[x]$, un campo di spezzamento K di $f(x)$ su F , il grado $[K : F]$, l'ordine, la struttura e gli elementi di un gruppo di Galois G di $f(x)$ su F .