ALGEBRA II

Prof.ssa Patrizia Longobardi

A.A. 2004/2005

III appello – 15 giugno 2005

Esercizio 1. Sia B un campo e si consideri l'usuale B-spazio vettoriale

$$B^4 = \{(a,b,c,d)|a,b,c,d \in B\}.$$

– Si verifichi che l'applicazione

$$\psi : (a,b,c,d) \in B^4 \to (2a-b, a+7b, c+d, 7c+2d) \in B^4$$

è un B-endomorfismo dello spazio vettoriale B^4 e se ne determinino, in funzione della caratteristica di B, il nucleo $ker\psi$ e l'immagine $Im\psi$, precisandone la dimensione ed una base.

– Nell'ipotesi $carB = 5$, si determinino un supplementare di $ker\psi$ ed uno di $Im\psi$, precisando se ne esiste uno comune, e se $ker\psi$ e $Im\psi$ sono tra loro supplementari.

– nell'ipotesi $carB = 3$, si verifichi che la posizione

$$\varphi((a,b,c,d) + ker\psi) = (a+b, c, 2d)$$

definisce un'applicazione φ di $B^4/ker\psi$ in B^3 e che tale applicazione è un isomorfismo di B–spazi vettoriali.

Esercizio 2. Sia p un primo e si consideri il polinomio

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x + 4 \in Z_p[x].$$

Distinguendo i casi casi:

$$p = 2, \;\; p = 3, \;\; p = 5,$$

(I) si decomponga $f(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili di $Z_p[x]$;

(II) posto $J = (f(x))$, dell'anello $Z_p[x]/J$ si caratterizzino gli elementi invertibili, i divisori dello zero, gli elementi nilpotenti;

(III) si determini un campo di spezzamento E di $f(x)$ rispetto a Z_p, precisandone l'ordine, il grado $|E : Z_p|$ ed una Z_p–base.