Prova scritta di ALGEBRA II
A.A. 2005/2006
Prof.ssa Patrizia Longobardi

III/IV APPELLO – 15 GIUGNO/ 13 LUGLIO 2006

Esercizio 1. Siano F un campo e $F^3 = \{(a, b, c)|a, b, c \in F\}$ l' usuale F-spazio vettoriale. Si considerino i vettori $v_1 = (1, -2, 3)$, $v_2 = (2, 1, 1)$, $v_3 = (\alpha, \beta, 1)$ ed il sottospazio $W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ di F^3.

– Si determini il valore c di $carF$ per cui risulti sempre $dimW < 3$, qualunque siano $\alpha, \beta \in F$, e si precisi poi la dimensione di W in funzione di α e β.

– Supposto $carF \neq c$, si individui la condizione su α e β perchè $dimW$ sia minore di 3, precisando poi tale dimensione.

– Supposto ora $\alpha = 5$ e $\beta = 4$, si determinino:

(i) i valori di $carF$ per cui $U = \langle v_1, v_3 \rangle$ ha dimensione 1;

(ii) il valore di $carF$ per cui $H = \langle v_2, v_3 \rangle$ ha dimensione 1 ed un relativo supplementare di H in F^3. Supposto inoltre $carF = 3$, si verifichi che la posizione $\varphi((a, b, c) + H) = (a - b - c, b - c)$ definisce un'applicazione φ di F^3/H in F^2, che tale applicazione è un isomorfismo di F-spazi vettoriali, e di essa si determini l' inversa.

Esercizio 2. Sia B un campo e si consideri il polinomio

$$f(x) = 105x^4 + x^3 + 7x^2 + 115x + 3 \in B[x].$$

Supposto $B = \mathbb{Z}_p$ e distinguendo i casi: $p = 2$, $p = 3$, $p = 5$, $p = 7$,

(I) si decomponga $f(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili di $\mathbb{Z}_p[x]$;

(II) posto $J = (f(x))$, dell'anello $\mathbb{Z}_p[x]/J$ si caratterizzino gli elementi invertibili, i divisori dello zero, gli elementi nilpotenti ;

(III) si determini un campo di spezzamento E di $f(x)$ rispetto a $\mathbb{Z}_p$, precisandone l'ordine, il grado $|E : \mathbb{Z}_p|$ e una $\mathbb{Z}_p$ -base.