

ALGEBRA II

PROF.SSA PATRIZIA LONGOBARDI

A.A. 2006/2007

III APPELLO 19 GIUGNO 2007

Esercizio 1. Siano F un campo e $F^3 = \{(a, b, c) | a, b, c \in F\}$ l'usuale F -spazio vettoriale.

- (i) Si considerino i vettori $v_1 = (6, 7, t)$, $v_2 = (1, 2, 3)$, $v_3 = (4, 5, 0)$ ed il sottospazio $W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ di F^3 .
- Si determini il valore c di $\text{car}F$ per cui risulti sempre $\dim W < 3$, qualunque sia $t \in F$.
 - Supposto $\text{car}F \neq c$, si precisi il valore di t per cui $\dim W < 3$ e si individui $\text{car}F$ per cui tale valore è 0.
 - Supposto infine $\text{car}F = 5$ e $t = 3$:
- (a) si precisi la dimensione di W ;
- (b) si individuino tre sottospazi supplementari di W ;
- (c) si verifichi che la posizione $\varphi((a, b, c) + W) = 3b - 2c$ definisce un'applicazione φ di F^3/W in F , che tale applicazione un isomorfismo di F -spazi vettoriali, e di essa si determini l'inversa.

Esercizio 2. Sia B un campo e si consideri il polinomio

$$f(x) = 70x^9 + x^6 + 3x^4 + 21x^2 - 1 \in B[x].$$

Supposto $B = \mathbb{Z}_p$ e distinguendo i casi: $p = 2, p = 3, p = 5$,

- si decomponga $f(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili di $\mathbb{Z}_p[x]$;
- posto $J = (f(x))$, dell'anello $\mathbb{Z}_p[x]/J$ si caratterizzino gli elementi invertibili, i divisori dello zero, gli elementi nilpotenti;
- si determini un campo di spezzamento E di $f(x)$ rispetto a \mathbb{Z}_p , precisandone l'ordine, il grado $|E : \mathbb{Z}_p|$ e una \mathbb{Z}_p -base.