ALGEBRA II

Prof.ssa Patrizia Longobardi

A.A. 2007/2008

III appello – 18 giugno 2008

Esercizio 1. - Sia F un campo e si consideri l'usuale F–spazio vettoriale $F^3 = \{(a, b, c)|a, b, c \in F\}$. Con $h \in F$ si considerino i vettori $v_1 = (h, 2, 6)$, $v_2 = (1, 1, h + 1)$, $v_3 = (3, 1, 3)$ ed il sottospazio $W = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ di F^3 .

- Si determinino i valori di h per cui la dimensione di W è minore di 3 .
- Per questi valori di h si precisi la dimensione di W in funzione della caratteristica di F.
- Sempre in funzione di h e della caratteristica di F, si precisi quando esiste un F-omomorfismo φ di F^3 in F tale che $\varphi(v_1) = 0$, $\varphi(v_2) = 1$ e $\varphi(v_3) = 1$.
- Posto $U = \langle v_3\rangle = \langle(3, 1, 3)\rangle$, si precisi la dimensione di U e se ne descrivano gli elementi. Si provi poi che la posizione $\psi((a, b, c) + U) = (3b - a, a - c)$ definisce un'applicazione ψ di F^3/U in F^2 , che tale applicazione è un omomorfismo di F-spazi vettoriali biettivo, e di determini l'inverso di ψ .

Esercizio 2. Si consideri il polinomio

$$f(x) = 21x^4 + 9x^3 + 25x^2 + 77x + 155 \in \mathbb{Z}_p[x].$$

(I) Distinguendo i casi: $p = 2$, $p = 3$, $p = 5$, $p = 7$,
- si decomponga $f(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili di $\mathbb{Z}_p[x]$;
- si determini di $f(x)$ un campo di spezzamento E rispetto a $\mathbb{Z}_p$, precisandone l'ordine, il grado $|E : \mathbb{Z}_p|$ e due $\mathbb{Z}_p$-basi;
- posto $J = (f(x))$, dell'anello $\mathbb{Z}_p[x]/J$ si caratterizzino gli elementi invertibili, i divisori dello zero, gli elementi nilpotenti.

(II) Posto sempre $J = (f(x))$, si precisi per quali valori di $p \in \{2, 3, 5, 7\}$ il laterale $(x - 1) + J$ è invertibile nell'anello $\mathbb{Z}_p[x]/J$ e, in questi casi, si determini tale inverso.

(III) Supposto $p = 2$, si dica se gli anelli $\mathbb{Z}_2[x]/(f(x))$ e $\mathbb{Z}_{16}$ sono isomorfi e, qualora lo siano, si costruisca un isomorfismo tra di essi.