ALGEBRA II

Prof.ssa Patrizia Longobardi

A.A. 2008/2009

III appello – 16 giugno 2009

Esercizio 1. – Sia F un campo e si consideri l'usuale F-spazio vettoriale $F^3 = \{(a,b,c) | a,b,c \in F\}$.

(I) Con $h, k \in \mathbb{Z}$ e 1_F unità di F, si considerino i vettori $v_1 = (2,4,6)$, $v_2 = (h1_F, 5, 0)$, $v_3 = (3, k1_F, 0)$ ed il sottospazio $W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ di F^3 . In funzione di h e k e della caratteristica di F :

- si discuta la dimensione di W ;
- si precisi una base di W;
- si individui un supplementare di W in F^3 .

(II) Si consideri il sottospazio $U = \langle v_1 \rangle = \langle (2,4,6) \rangle$ di F^3 .

- Si descrivano gli elementi di U e se ne determini la dimensione.
- Si individui, in funzione della caratteristica di F , quando U è un sottoanello dell'anello prodotto F^3 , quando un ideale.
- Si verifichi che la posizione $\psi((a,b,c) + U) = (2a - b, 3a - c)$ definisce un'applicazione ψ di F^3/U in F e si provi che tale applicazione è un epimorfismo di F-spazi vettoriali. Si discuta poi quando è biettiva e, in tal caso, se ne determini l'inversa. Infine si precisi se, e eventualmente quando, ψ è anche un omomorfismo di anelli.

Esercizio 2. - Si consideri il polinomio

$$f(x) = 5x^6 + 14x^5 + x^4 + 6x^2 + 7 \in \mathbb{Z}_p[x].$$

Distinguendo i casi: $p = 2$, $p = 3$, $p = 5$, $p = 7$,

(I) si decomponga $f(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili di $\mathbb{Z}_p[x]$;

(II) si determini di $f(x)$ un campo di spezzamento E rispetto a $\mathbb{Z}_p$, precisandone l'ordine, il grado $|E : \mathbb{Z}_p|$ e due $\mathbb{Z}_p$-basi;

(III) si determinino i valori di p per cui risulti -3 radice di $f(x)$ e quelli per cui -3 risulti radice multipla;

(IV) posto $J = (f(x))$, si precisi per quali valori di $p \in \{2,3,5,7\}$ il laterale $(x+3)+J$ è invertibile nell'anello $\mathbb{Z}_p[x]/J$ e se ne determini l'inverso.