ALGEBRA II

Prof.ssa Patrizia Longobardi

A.A. 2009/2010

III appello - 9 giugno 2010

Esercizio 1. - Sia F un campo e si consideri l' usuale F-spazio vettoriale $F^4 = \{(a, b, c, d) | a, b, c, d \in F\}$. Con $h \in F$, si considerino i vettori $v_1 = (7, 2, 3, 4)$, $v_2 = (6, 5, 0, 2)$ e $v_3 = (3, 2, 3, 1)$, $v_4 = (1, h, 6, 3)$, $v_5 = (2, 4, 2, 16)$ ed i sottospazi $W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ e $V = \langle v_4, v_5 \rangle$ di F^4 .

- In funzione di h e della caratteristica di F: si discutano la dimensione di W e quella di V; si determinino un supplementare di W e un supplementare di V; si individui quando i sottospazi W e V sono supplementari.
- Considerato $V = \langle v_4, v_5 \rangle = \langle (1, h, 6, 3), (2, 4, 2, 16) \rangle$, si descrivano gli elementi di V e si precisi quando la posizione $\psi((a, b, c, d) + V) = 3b + 2c - d$ definisce un'applicazione ψ di F^4/V in F, provando poi che tale applicazione è un omomorfismo di F-spazi vettoriali, e studiando quando è iniettivo, quando è suriettivo, e, in caso di isomorfismo, individuandone l'inverso.

Esercizio 2. - Si consideri il polinomio

$$f(x) = 25x^7 + 21x^5 + 21x^4 + 28x^3 + 22x^2 + 19x + 5 \in \mathbb{Z}_p[x].$$

Distinguendo i casi: $p = 2$, $p = 3$, $p = 5$,

(I) si decomponga $f(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili di $\mathbb{Z}_p[x]$;

(II) si determini di $f(x)$ un campo di spezzamento E rispetto a $\mathbb{Z}_p$, precisandone l' ordine, il grado $|E : \mathbb{Z}_p|$ e due $\mathbb{Z}_p$-basi;

(III) posto $J = (f(x))$, dell' anello $\mathbb{Z}_p[x]/J$ si caratterizzino gli elementi invertibili, i divisori dello zero, gli elementi nilpotenti.

Posto ancora $J = (f(x))$, si precisi per quali valori di $p \in \{2, 3, 5, \}$ il laterale $(x + 1) + J$ è invertibile nell' anello $\mathbb{Z}_p[x]/J$ e se ne determini l'inverso.

Infine si individuino i valori di p per cui risulti -1 radice di $f(x)$ e quello per cui -1 risulti radice doppia.