ALGEBRA II

Prof.ssa Patrizia Longobardi

A.A. 2010/2011

III appello - 21 giugno 2011

Esercizio 1. - Sia F un campo e si consideri l' usuale F-spazio vettoriale $F^4 = \{(a,b,c,d)|a,b,c,d \in F\}$. Con $h \in F$, si considerino i vettori $v_1 = (1,3,3,4)$, $v_2 = (0,h,1,0)$ e $v_3 = (2,0,5,0)$, $v_4 = (5,0,8,0)$, $v_5 = (1,1,0,2)$ ed i sottospazi $W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ e $V = \langle v_4, v_5 \rangle$ di F^4 .

- In funzione di h e della caratteristica di F: si discutano la dimensione di W e quella di V; si individui quando il sottospazio $W \cap V$ è non nullo, quando $W + V$ coincide con F^4 e si precisi quando, in particolare, si ha $F^4 = W \oplus V$.
- Considerato $V = \langle v_4, v_5 \rangle$: si verifichi che la posizione $\psi((a,b,c,d)+V) = (8a-5c-4d, 2b-d)$ definisce un'applicazione ψ di F^4/V in F^2, che tale applicazione è un isomorfismo di F-spazi vettoriali e di essa si determini l'inversa.

Esercizio 2. - Si consideri il polinomio

$$f(x) = 35x^5 + 4x^3 + 6x^2 + 92x + 3 \in \mathbb{Z}_p[x].$$

Distinguendo i casi: $p = 2$, $p = 3$, $p = 5$, $p = 7$

(I) si decomponga $f(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili di $\mathbb{Z}_p[x]$;

(II) si determini di $f(x)$ un campo di spezzamento E rispetto a $\mathbb{Z}_p$, precisandone l' ordine, il grado $|E : \mathbb{Z}_p|$ e due $\mathbb{Z}_p$-basi;

Posto $J = (f(x))$, si individui l'unico valore di $p \in \{2,3,5,7\}$ per cui nell'anello $\mathbb{Z}_p[x]/J$ esiste $((x-1)+J)^{-1}$ e si determini tale inverso. Si discuta poi l'eventuale esistenza di $((x^2+3)+J)^{-1}$ per $p \in \{2,3,5,7\}$. Infine si precisi per quale valore di $p \in \{2,3,5,7\}$ esistono in $\mathbb{Z}_p[x]/J$ elementi nilpotenti non nulli, e si esibisca un tale elemento.