ALGEBRA II

III Appello - 19 giugno 2012

A.A. 2011/2012

1 - Sia F un campo e si consideri l' usuale F-spazio vettoriale

$$F^4 = \{(a,b,c,d) \mid a,b,c,d \in F\}.$$

Con $h \in F$, si considerino i vettori $v_1 = (0,4,0,10)$, $v_2 = (1,6,3,0)$, $v_3 = (3,1,2,3)$, $v_4 = (2,9,6,0)$, $v_5 = (h,0,3,0)$ ed i sottospazi $W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ e $V = \langle v_4, v_5 \rangle$ di F^4.

(I) In funzione di h e della caratteristica di F:

- si discutano la dimensione di W e la dimensione di V;
- si individui quando il sottospazio $W \cap V$ è non nullo e quando $F^4 = W \oplus V$.

(II) Considerato il sottospazio $U = \langle v_2, v_3, v_4 \rangle$, si descrivano gli elementi di U e, in funzione della caratteristica di F:

- si determini la dimensione di U;
- si verifichi quando la posizione $\psi((a,b,c,d)+U) = (b-2c,d)$ definisce un'applicazione ψ di F^4/U in F^2, e si provi poi che in tal caso l'applicazione è un isomorfismo di F-spazi vettoriali, precisandone anche l'inverso.

2 - Si consideri il polinomio

$$f(x) = x^5 + 8x^4 + 6x^3 + 4x^2 + 5x + 1 \in \mathbb{Z}_p[x].$$

Distinguendo i casi: $p = 2$, $p = 3$, $p = 5$,

(I) si decomponga $f(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili di $\mathbb{Z}_p[x]$;

(II) si determini di $f(x)$ un campo di spezzamento E rispetto a $\mathbb{Z}_p$, precisandone l'ordine, il grado $|E : \mathbb{Z}_p|$ e due $\mathbb{Z}_p$-basi;

(III) posto $J = (f(x))$, si individuino i valori di $p \in \{2,3,5\}$ per cui nell'anello $\mathbb{Z}_p[x]/J$ esiste $((x+2)+J)^{-1}$ e si determini tale inverso. Si discuta poi l'eventuale esistenza di $((x^2+19x+5)+J)^{-1}$ per $p \in \{2,3,5\}$. Infine si precisi per quali valori di $p \in \{2,3,5\}$ esistono in $\mathbb{Z}_p[x]/J$ elementi nilpotenti non nulli, e si esibisca un tale elemento.