

ALGEBRA II

III Appello bis - 11 luglio 2012

A.A. 2011/2012

1 - Sia F un campo e si consideri l'usuale F -spazio vettoriale

$$F^4 = \{(a, b, c, d) \mid a, b, c, d \in F\}.$$

Con $h \in F$, si considerino i vettori $v_1 = (1, 2, 0, 4)$, $v_2 = (3, 0, 6, 7)$, $v_3 = (0, 4, 1, 0)$, $v_4 = (4, 3, 0, 1)$, $v_5 = (2, 1, 0, h)$ ed i sottospazi $W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ e $V = \langle v_4, v_5 \rangle$ di F^4 .

(I) In funzione di h e della caratteristica di F :

- si discutano la dimensione di W e la dimensione di V ;
- si determinino un supplementare di W e un supplementare di V ;
- si precisi la dimensione del sottospazio $W + V$ e si individui quando $F^4 = W \oplus V$.

(II) Considerato il sottospazio $U = \langle v_1, v_2, v_5 \rangle$, si descrivano gli elementi di U e, in funzione della caratteristica di F :

- si determini la dimensione di U ;
- si verifichi quando la posizione $\psi((a, b, c, d) + U) = (2a - b - c, c)$ definisce un'applicazione ψ di F^4/U in F^2 , e si provi poi che in tal caso l'applicazione è un isomorfismo di F -spazi vettoriali, precisandone anche l'inverso.

2 - Si consideri il polinomio

$$f(x) = 15x^6 + 7x^5 + 18x^4 + 9x^3 + 2x^2 + 11x + 17 \in \mathbb{Z}_p[x].$$

Distinguendo i casi: $p = 2$, $p = 3$, $p = 5$,

- (I) si decomponga $f(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili di $\mathbb{Z}_p[x]$;
- (II) si determini di $f(x)$ un campo di spezzamento E rispetto a \mathbb{Z}_p , precisandone l'ordine, il grado $[E : \mathbb{Z}_p]$ e due \mathbb{Z}_p -basi;
- (III) posto $J = (f(x))$, si individuino i valori di $p \in \{2, 3, 5\}$ per cui nell'anello $\mathbb{Z}_p[x]/J$ esiste $((x + 2) + J)^{-1}$ e si determini tale inverso. Si discuta poi l'eventuale esistenza di $((x^2 + 3x + 7) + J)^{-1}$ per $p \in \{2, 3, 5\}$. Infine si precisi per quali valori di $p \in \{2, 3, 5\}$ esistono in $\mathbb{Z}_p[x]/J$ elementi nilpotenti non nulli, e si esibisca un tale elemento.