ALGEBRA II

III Appello - 19 giugno 2013

A.A. 2012/2013

1 - Sia F un campo e si consideri l'usuale F-spazio vettoriale

$$F^3 = \{(a,b,c) \mid a,b,c \in F\}.$$

Con $h,k \in F$, si considerino i vettori $v_1 = (2,5,6)$, $v_2 = (3,0,h)$, $v_3 = (2,6,7)$, $v_4 = (4,0,k)$ ed i sottospazi $W = \langle v_1, v_2 \rangle$ e $V = \langle v_3, v_4 \rangle$ di F^3 .

(I) In funzione di h, di k e della caratteristica di F:

- si discutano la dimensione di W e la dimensione di V;
- si determinino un supplementare di W e un supplementare di V;
- si individui quando il sottospazio $W + V$ coincide con F^3 e si precisi quando tale somma è diretta.

(II) Posto $U = \langle v_1, v_3 \rangle = \langle (2,5,6), (2,6,7) \rangle$,

- si descrivano gli elementi di U e se ne determini la dimensione;
- si verifichi che la posizione $\psi((a,b,c)+U) = 7a+14b-14c$ definisce un'applicazione ψ di F^3/U in F e che tale applicazione è un omomorfismo di F-spazi vettoriali; in funzione della caratteristica di F si precisi quando è suriettivo, quando è iniettivo e, in caso d'isomorfismo, se ne determini l'inverso.

2 - Si consideri il polinomio

$$f(x) = x^6 + x^5 + 5x^4 + x^3 + 5x^2 + 5x + 45 \in \mathbb{Z}_p[x].$$

Distinguendo i casi: $p = 2$, $p = 3$, $p = 5$, $p = 7$,

(I) si decomponga $f(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili di $\mathbb{Z}_p[x]$;

(II) si determini di $f(x)$ un campo di spezzamento E rispetto a $\mathbb{Z}_p$, precisandone l'ordine, il grado $|E : \mathbb{Z}_p|$ e due $\mathbb{Z}_p$-basi;

(III) posto $J = (f(x))$, dell'anello $\mathbb{Z}_p[x]/J$ si caratterizzino gli elementi invertibili, i divisori dello zero, gli elementi nilpotenti.

Posto sempre $J = (f(x))$, si precisi per quali valori di $p \in \{2,3,5,7\}$ il laterale $(x-1)+J$ è invertibile nell'anello $\mathbb{Z}_p[x]/J$ e se ne determini l'inverso.