ALGEBRA II

Prof.ssa Patrizia Longobardi

A.A. 2003/2004

III (IV) appello – 16 giugno (luglio) 2004

Esercizio 1. Si considerino i polinomi

$$h(x) = x^2 + x + 1 \in Z_2[x], \quad k(x) = x^4 + x + 1 \in Z_2[x].$$

Si provi che tali polinomi sono entrambi irriducibili in $Z_2[x]$.
Considerati gli ampliamenti $Z_2(d)$ e $Z_2(c)$ con d radice di $h(x)$ e c radice di $k(x)$, strutturati a Z_2-spazi vettoriali, di ciascuno di essi si determinino la dimensione e due basi.
Si giustifichi perchè ha senso l'applicazione:

$$\varphi : \alpha + \beta d \in Z_2(d) \to \alpha + \beta c + \beta c^2 \in Z_2(c)$$

e si provi che φ è un monomorfismo sia di Z_2-spazi vettoriali che di campi.
Considerato infine $Im\varphi$, se ne determinino una base e un supplementare nello Z_2-spazio vettoriale $Z_2(c)$, giustificando poi perchè un tale supplementare non è un sottocampo del campo $Z_2(c)$.

Esercizio 2.
(I) Considerato il polinomio $g(x) = x^4 - 6x^3 + 24x - 16 \in F[x]$, se ne determinino un campo di spezzamento E su F e il gruppo di Galois su F, in ciascuno dei seguenti casi: $F = Q$, $F = R$.
(II) Si consideri il polinomio $f(x) = x^2 - 6x + 4 \in Z_p[x]$, con p primo.
Si provi che né 1 né 5 è radice di $f(x)$, qualunque sia p.
Si determinino i valori di p per cui 10 è radice di $f(x)$, e i valori di p per cui $f(x)$ ha radici doppie.
Si determini un campo di spezzamento K di $f(x)$ su Z_p in ciascuno dei seguenti casi: $p = 2$, $p = 3$, $p = 5$, $p = 7$, $p = 11$.