ALGEBRA II

Prof.ssa Patrizia Longobardi

A.A. 2002/2003

IV appello – 2 luglio 2003

Esercizio 1. Sia B un campo e si consideri l'applicazione

$$\varphi : a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots + a_nx^n \in B[x] \mapsto 4a_0 + 3a_1x + 2a_2x^2 + a_3x^3 \in B[x].$$

- Si provi che φ è un endomorfismo dell'usuale B–spazio vettoriale $B[x]$.
- Si determinino, in funzione della caratteristica di B, il nucleo e l'immagine di φ, precisandone anche la dimensione e una base.
- Si verifichi poi che, in ogni caso, si ha $B[x] = ker\varphi \oplus Im\varphi$.
- Posto infine $f(x) = \lambda x^3$, $g(x) = x^2 + \lambda x$, $h(x) = -\lambda x^3 - x + \lambda$, $k(x) = x^2 + \lambda^2 x$, si determinino, in funzione di λ, la dimensione e una base del sottospazio

$$H = \langle f(x), g(x), h(x), k(x)\rangle.$$

Esercizio 2. Sia F un campo, e si consideri il polinomio $f(x) = x^3 - 5 \in F[x]$. In ciascuno dei seguenti casi:

$$F = Z_2, \quad F = Z_3, \quad F = Z_5, \quad F = Z_7, \quad F = Q, \quad F = R,$$

si determinino una decomposizione di $f(x)$ in fattori irriducibili di $F[x]$, un campo di spezzamento K di $f(x)$ su F, il grado $|K : F|$, l'ordine, la struttura e gli elementi di un gruppo di Galois G di $f(x)$ su F.