ALGEBRA II

Prof.ssa Patrizia Longobardi

A.A. 2004/2005

IV appello – 5 luglio 2005

Esercizio 1. Sia B un campo e si consideri l'usuale B-spazio vettoriale

$$B^4 = \{(a, b, c, d) | a, b, c, d \in B\}.$$

– Si verifichi che l'applicazione

$$\psi : (a, b, c, d) \in B^4 \to (2a + 3b, 11a - b, 3c + 2d, 4c + d) \in B^4$$

è un B-endomorfismo dello spazio vettoriale B^4 e se ne determinino, in funzione della caratteristica di B, il nucleo $ker\psi$ e l'immagine $Im\psi$, precisandone la dimensione ed una base.

– Nell'ipotesi $carB = 5$, si determinino un supplementare di $ker\psi$ ed uno di $Im\psi$, precisando se ne esiste uno comune, e se $ker\psi$ e $Im\psi$ sono tra loro supplementari.

– Nell'ipotesi $carB = 7$, si verifichi che la posizione

$$\varphi((a, b, c, d) + ker\psi) = (4a - b, 3c, d)$$

definisce un'applicazione φ di $B^4/ker\psi$ in B^3 e che tale applicazione è un isomorfismo di B–spazi vettoriali.

Esercizio 2. Sia p un primo e si consideri il polinomio

$$f(x) = x^3 + 4x^2 + 3x + 98 \in Z_p[x].$$

Distinguendo i casi casi:

$$p = 2,\ \ p = 3,\ \ p = 5,\ \ p = 7$$

(I) si decomponga $f(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili di $Z_p[x]$;

(II) posto $J = (f(x))$, dell'anello $Z_p[x]/J$ si caratterizzino gli elementi invertibili, i divisori dello zero, gli elementi nilpotenti;

(III) si determini un campo di spezzamento E di $f(x)$ rispetto a Z_p, precisandone l'ordine, il grado $|E : Z_p|$ ed una Z_p–base.

– Si giustifichi perchè, se $g(x) \in Z_p[x]$ è un qualunque polinomio di III grado irriducibile in $Z_p[x]$, allora il campo $Z_p(c)$, con c radice di $g(x)$, è di spezzamento per $g(x)$ rispetto a Z_p.