

ALGEBRA II

PROF.SSA PATRIZIA LONGOBARDI

A.A. 2006/2007

IV APPELLO 10 LUGLIO 2007

Esercizio 1. Siano F un campo e $F^3 = \{(a, b, c) | a, b, c \in F\}$ l'usuale F -spazio vettoriale.

- (a) Si considerino i vettori $v_1 = (3, 2, 1)$, $v_2 = (2, 6, x)$, $v_3 = (5, 1, 4)$ ed il sottospazio $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ di F^3 .
 - Si determini il valore c di $\text{car}F$ per cui risulti sempre $\dim V < 3$, qualunque sia $x \in F$, e si studi poi tale dimensione in funzione di x .
 - Supposto $\text{car}F \neq c$, si precisi il valore di x per cui $\dim V < 3$ e si individui $\text{car}F$ per cui tale valore è 0.
- (b) Si considerino poi i vettori $u_1 = v_1 = (3, 2, 1)$, $u_2 = v_3 = (5, 1, 4)$, $u_3 = (0, 1, 1)$ ed il sottospazio $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ di F^3 . In funzione di $\text{car}F$, si studi la dimensione di U e se ne individui un sottospazio supplementare, precisando se è unico.
- (c) Considerato il sottospazio $W = \langle u_1, u_3 \rangle = \langle (3, 2, 1), (0, 1, 1) \rangle$, si verifichi che la posizione

$$\varphi((a, b, c) + W) = a - 3b + 3c$$

definisce un'applicazione φ di F^3/W in F , che tale applicazione è un isomorfismo di F -spazi vettoriali, e di essa si determini l'inversa.

Esercizio 2. Sia B un campo e si consideri il polinomio

$$f(x) = 196x^{15} + 126x^{10} + 63x^5 + 85x^3 + 1 \in B[x].$$

Supposto $B = \mathbb{Z}_p$ e distinguendo i casi casi:

$$p = 2, \quad p = 3, \quad p = 5, \quad p = 7,$$

- (I) si decomponga $f(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili di $\mathbb{Z}_p[x]$;
- (II) posto $J = (f(x))$, dell'anello $\mathbb{Z}_p[x]/J$ si caratterizzino gli elementi invertibili, i divisori dello zero, gli elementi nilpotenti;
- (III) si determini un campo di spezzamento E di $f(x)$ rispetto a \mathbb{Z}_p , precisandone l'ordine, il grado $|E : \mathbb{Z}_p|$ ed una \mathbb{Z}_p -base.