ALGEBRA II

Prof.ssa Patrizia Longobardi

A.A. 2007/2008

IV appello – 8 luglio 2008

Esercizio 1. - Sia F un campo e si consideri l'usuale F-spazio vettoriale $F^3 = \{(a,b,c)|a,b,c \in F\}$. Con $h \in F$ si considerino i vettori $v_1 = (3,h,1)$, $v_2 = (h,1,3)$, $v_3 = (1,h+1,2)$ ed il sottospazio $W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ di F^3 .

- Si determinino i valori di h per cui la dimensione di W è minore di 3 , e si precisi tale dimensione.
- In funzione di h e della caratteristica di F, si precisi quando esiste un F-omomorfismo φ di F^3 in F tale che $\varphi(v_1) = 0$ e $\varphi(v_2) = 1$.
- Posto $U = \langle (3,1,1),(1,13) \rangle$, se ne descrivano gli elementi. Si provi poi che la posizione $\psi((a,b,c)+U) = a-4b+c$ definisce un'applicazione ψ di F^3/U in F e che tale applicazione è un omomorfismo di F-spazi vettoriali suriettivo. Infine, determinata la dimensione di U in funzione della caratteristica di F , si precisi quando ψ è iniettiva e se ne determini l'inversa.

Esercizio 2. Si consideri il polinomio

$$f(x) = 10x^4 + 31x^3 + 3x^2 + 11x + 55 \in \mathbb{Z}_p[x].$$

(I) Distinguendo i casi: $p = 2$, $p = 3$, $p = 5$, $p = 7$, $p = 11$,
- si decomponga $f(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili di $\mathbb{Z}_p[x]$;
- si determini di $f(x)$ un campo di spezzamento E rispetto a $\mathbb{Z}_p$, precisandone l'ordine, il grado $|E : \mathbb{Z}_p|$ e, se esistono, due $\mathbb{Z}_p$-basi;
- posto $J = (f(x))$, dell'anello $\mathbb{Z}_p[x]/J$ si caratterizzino gli elementi invertibili, i divisori dello zero, gli elementi nilpotenti.

(II) Posto sempre $J = (f(x))$, si precisi per quali valori di $p \in \{2,3,5,7,11\}$ il laterale $(x-1)+J$ è invertibile nell'anello $\mathbb{Z}_p[x]/J$ e, in questi casi, si determini tale inverso.

(III) Supposto $p = 3$, si dica se gli anelli $\mathbb{Z}_3[x]/(f(x))$ e $\mathbb{Z}_{81}$ sono isomorfi e, qualora lo siano, si costruisca un isomorfismo tra di essi.