

# ALGEBRA II

PROF.SSA PATRIZIA LONGOBARDI

A.A. 2008/2009

IV APPELLO - 7 LUGLIO 2009

**Esercizio 1.** - Sia  $F$  un campo e si consideri l'usuale  $F$ -spazio vettoriale  $F^3 = \{(a, b, c) | a, b, c \in F\}$ . Con  $\alpha \in F$  si considerino i vettori  $v_1 = (3, 3, 1)$ ,  $v_2 = (6, 2, 4)$  e  $v_3 = (9, \alpha, 5)$  ed il sottospazio  $W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$  di  $F^3$ .

- In funzione di  $\alpha$  e della caratteristica di  $F$ : si discuta la dimensione di  $W$ , si individui una base di  $W$  e si precisi quando il sottospazio  $V = \langle (1, 0, 0) \rangle$  è un supplementare di  $W$  in  $F^3$ .
- Posto  $U = \langle v_1, v_2 \rangle = \langle (3, 3, 1), (6, 2, 4) \rangle$ , si descrivano gli elementi di  $U$  e se ne determini la dimensione. Si precisi quando la posizione  $\psi((a, b, c) + U) = (a - b, 2c)$  definisce un'applicazione  $\psi$  di  $F^3/U$  in  $F^2$  e si provi che in tal caso l'applicazione è un omomorfismo di  $F$ -spazi vettoriali, precisando anche se è iniettivo e se è suriettivo.

**Esercizio 2.** - Si consideri il polinomio

$$f(x) = 21x^6 + 15x^5 + 10x^4 + x^3 + 3 \in \mathbb{Z}_p[x].$$

Distinguendo i casi:  $p = 2$ ,  $p = 3$ ,  $p = 5$ ,  $p = 7$ ,

- (I) si decomponga  $f(x)$  nel prodotto di fattori irriducibili di  $\mathbb{Z}_p[x]$ ;
- (II) si determini di  $f(x)$  un campo di spezzamento  $E$  rispetto a  $\mathbb{Z}_p$ , precisandone l'ordine, il grado  $[E : \mathbb{Z}_p]$  e due  $\mathbb{Z}_p$ -basi.
- (III) Si individuino i valori del primo  $p$  per cui risulti  $g(x) = x^2 - 8x + 12 \in \mathbb{Z}_p[x]$  divisore di  $f(x)$  in  $\mathbb{Z}_p[x]$ , ed almeno tre valori di  $p$  per cui risulti  $g(x)$  coprimo con  $f(x)$ .