ALGEBRA II

Prof.ssa Patrizia Longobardi

A.A. 2009/2010

IV appello - 7 luglio 2010

Esercizio 1. - Sia F un campo e si consideri l' usuale F-spazio vettoriale $F^3 = \{(a,b,c)|a,b,c \in F\}$. Con $h \in F$ si considerino i vettori $v_1 = (1,0,4)$, $v_2 = (5,h,2)$, $v_3 = (6,7,6)$, $v_4 = (2,8,6)$, $v_5 = (3,h+5,9)$ ed i sottospazi $W = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ e $V = \langle v_4, v_5\rangle$ di F^3 .

– In funzione di h e della caratteristica di F: si discutano la dimensione di W e la dimensione di V; si individui quando il sottospazio $W + V$ coincide con F^3, precisando quando tale somma è diretta.
– Posto $U = \langle v_1, v_2\rangle = \langle (1,0,4),(5,h,2)\rangle$ di F^3, si descrivano gli elementi di U e, in funzione di h e della caratteristica di F: si determini la dimensione di U, si precisi quando la posizione $\psi((a,b,c)+U) = 4a + b - c$ definisce un'applicazione ψ di F^3/U in F, provando poi che in tal caso l'applicazione è un omomorfismo di F-spazi vettoriali e studiando quando è suriettivo, quando iniettivo e, in caso di isomorfismo, individuandone l'inverso.

Esercizio 2. - Si considerino i polinomi

$$f(x) = 3x^5 + 8x^4 + 11x^3 + 11x^2 + x + 2 \ \text{ e } \ g(x) = 7x^4 + 8x^3 + 21x^2 + 8x + 12 \in \mathbb{Z}_p[x].$$

Distinguendo i casi: $p = 2$, $p = 3$, $p = 5$,

(I) si decompongano nel prodotto di fattori irriducibili di $\mathbb{Z}_p[x]$ i polinomi $f(x)$ e $g(x)$, e di ciascuno di essi si determini un campo di spezzamento rispetto a $\mathbb{Z}_p$, precisandone l' ordine, il grado rispetto a $\mathbb{Z}_p$ e due $\mathbb{Z}_p$-basi; in particolare si precisi se $f(x)$ e $g(x)$ hanno campi di spezzamento isomorfi;
(II) si determini un massimo comun divisore $d(x)$ dei polinomi $f(x)$ e $g(x)$; posto poi $J = (d(x))$, si studi l'anello quoziente $\mathbb{Z}_p[x]/J$.