ALGEBRA II

Prof.ssa Patrizia Longobardi

A.A. 2010/20111

IV appello - 13 luglio 2011

Esercizio 1. - Sia F un campo e si consideri l' usuale F-spazio vettoriale $F^4 = \{(a,b,c,d)|a,b,c,d \in F\}$. Con $h,k \in F$, si considerino i vettori $v_1 = (1,2,h,6)$, $v_2 = (1,5,2,9)$ e $v_3 = (2,3,6,8)$, $v_4 = (5,k,10,15)$ ed i sottospazi $W = \langle v_1, v_2 \rangle$ e $V = \langle v_3, v_4 \rangle$ di F^4 .

- In funzione di h, di k e della caratteristica di F: si discutano la dimensione di W e quella di V; si individui se e quando il sottospazio W è contenuto strettamente in V, se e quando il sottospazio V è contenuto strettamente in W.
- Posto $U = \langle v_2, v_4 \rangle = \langle (1,5,2,9), (5,k,10,15) \rangle$, si descrivano gli elementi di U e, in funzione di k e della caratteristica di F: si determini la dimensione di U; si determini il valore di k per cui la posizione $\psi((a,b,c,d)+U) = (b+2c-d, 2a-c)$ definisce un'applicazione ψ di F^4/U in F^2, e si provi poi che in tal caso l'applicazione è un epimorfismo di F-spazi vettoriali. Infine si studi quando è iniettivo e, in caso d'isomorfismo, se ne precisi l'inverso.

Esercizio 2. - Si consideri il polinomio

$$f(x) = x^6 + 7x^5 + 21x^4 + 115x^3 + 105x^2 + 5x + 105 \in \mathbb{Z}_p[x]$$

Distinguendo i casi: $p = 2$, $p = 3$, $p = 5$, $p = 7$,

(I) si decomponga $f(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili di $\mathbb{Z}_p[x]$;

(II) si determini di $f(x)$ un campo di spezzamento E rispetto a $\mathbb{Z}_p$, precisandone l' ordine, il grado $|E : \mathbb{Z}_p|$ e due $\mathbb{Z}_p$-basi;

Posto $J = (f(x))$, si individui l'unico valore di $p \in \{2,3,5,7\}$ per cui nell'anello $\mathbb{Z}_p[x]/J$ esiste $((x+1)+J)^{-1}$ e si determini tale inverso. Si discuta poi l'eventuale esistenza di $(x+J)^{-1}$ per $p \in \{2,3,5,7\}$. Infine si precisi per quale valore di $p \in \{2,3,5,7\}$ esistono in $\mathbb{Z}_p[x]/J$ elementi nilpotenti non nulli, e si esibisca un tale elemento.