ALGEBRA II

IV Appello - 18 settembre 2012

A.A. 2011/2012

1 - Sia F un campo e si consideri l' usuale F-spazio vettoriale

$$F^3 = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in F\}.$$

Con $h, k \in F$, si considerino i vettori $v_1 = (2, 3, 4)$, $v_2 = (h, 5, 6)$, $v_3 = (9, 10, 11)$, $v_4 = (4, 15, k)$ ed i sottospazi $W = \langle v_1, v_2 \rangle$ e $V = \langle v_3, v_4 \rangle$ di F^3.

(I) In funzione di h di k e della caratteristica di F:

- si discutano la dimensione di W e la dimensione di V;
- si determinino un supplementare di W e un supplementare di V;
- supposto *car* $F = 2$, si individui quando il sottospazio $W + V$ coincide con F^3 e si precisi quando tale somma è diretta.

(II) Posto $U = \langle v_1, v_3 \rangle = \langle (2, 3, 4), (9, 10, 11) \rangle$, si descrivano gli elementi di U e, in funzione della caratteristica di F:

- si determini la dimensione di U;
- si verifichi che la posizione $\psi((a, b, c) + U) = a + c - 2b$ definisce un'applicazione ψ di F^3/U in F e che tale applicazione è un omomorfismo di F-spazi vettoriali, sempre suriettivo, e si precisi quando è iniettivo individuandone, in tal caso, l'inverso.

2 - Si consideri il polinomio

$$f(x) = x^5 + 7x^4 + 3x^3 + 18x^2 + 13x + 133 \in \mathbb{Z}_p[x].$$

Distinguendo i casi: $p = 2$, $p = 3$, $p = 5$, $p = 7$,

(I) si decomponga $f(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili di $\mathbb{Z}_p[x]$;

(II) si determini di $f(x)$ un campo di spezzamento E rispetto a $\mathbb{Z}_p$, precisandone l'ordine, il grado $|E : \mathbb{Z}_p|$ e due $\mathbb{Z}_p$-basi;

(III) posto $J = (f(x))$,

- si precisi per quale valore di $p \in \{2, 3, 5, 7\}$ il laterale $(x + 7) + J$ è invertibile nell'anello $\mathbb{Z}_p[x]/J$ e se ne determini l'inverso;
- si precisi per quale valore di $p \in \{2, 3, 5, 7\}$ esistono in $\mathbb{Z}_p[x]/J$ elementi nilpotenti non nulli, e si esibisca un tale elemento.