ALGEBRA II

Prof.ssa Patrizia Longobardi

A.A. 2002/2003

V appello – 15 settembre 2003

Esercizio 1. Sia B un campo.
(I) Si consideri l'applicazione

$$\varphi : g(x) \in B[x] \to 2g(x) + 3g'(x) \in B[x].$$

- Si provi che φ è un endomorfismo dell'usuale B-spazio vettoriale $B[x]$.
- Si determinino, in funzione della caratteristica di B, il nucleo e l'immagine di φ, precisandone anche la dimensione e una base.
- Si precisi quando si ha $B[x] = ker\varphi \oplus Im\varphi$.

(II) Considerati in $B[x]$ i polinomi:

$$l(x) = (\lambda^3 - \lambda)x^3 - 2x^2 + \lambda + 1, \quad j(x) = x^2 + (1-\lambda)x - 1,$$

$$h(x) = (\lambda^2 + 1)x^2 - \lambda - 1, \quad k(x) = -\lambda x^2 + (\lambda - 1)x + 1,$$

si determinino, in funzione di λ, la dimensione e una base del sottospazio

$$H = \langle l(x), j(x), h(x), k(x) \rangle.$$

Esercizio 2. Sia F un campo, e si consideri il polinomio $f(x) = x^4 - 2 \in F[x]$. In ciascuno dei seguenti casi:

$$F = Z_2, \;\; F = Z_3 \;\; , F = Z_5, \;\; F = Z_7, \;\; F = Q, \;\; F = R$$

si determinino una decomposizione di $f(x)$ in fattori irriducibili di $F[x]$, un campo di spezzamento K di $f(x)$ su F, il grado $|K : F|$, l'ordine, la struttura e gli elementi di un gruppo di Galois G di $f(x)$ su F.