ALGEBRA II

Prof.ssa Patrizia Longobardi

A.A. 2003/2004

V appello – 22 settembre 2004

Esercizio 1. Sia F un campo e si consideri l' insieme F^2 strutturato ad anello e a F-spazio vettoriale nel modo usuale. Sia $\varphi : (a, b) \in F^2 \to a^3 + b^3 \in F$.

Si provi che φ è un omomorfismo di $(F^2, +)$ in $(F, +)$ se e solo se $carF = 3$ o $|F| = 2$.

Si dimostri poi che φ è un F-omomorfismo se e solo se $|F| = 2$ o $|F| = 3$. Distinguendo allora i casi $F = Z_2$ e $F = Z_3$, si determinino $Ker\varphi$ e tutti i suoi supplementari.

Si provi infine che φ non è mai un omomorfismo di $(F^2, \cdot)$ in $(F, \cdot)$.

Esercizio 2. Siano K un campo e B un sottocampo di K, e si consideri il polinomio

$$f(x) = x^5 + 15x + 1 \in B[x].$$

Sia poi c un elemento di K radice di $f(x)$. Studiando separatamente i casi $B = Z_2$, $B = Z_3$, $B = Z_5$, $B = Z_7$ ed esaminando le varie possibilità, si determinino $|B(c) : B|$, $|B(c)|$, due B-basi di $B(c)$, l'ordine e la struttura di $Gal(B(c)/B)$, un campo di spezzamento E di $f(x)$ su B e il grado $|E : B|$.