ALGEBRA II

Prof.ssa Patrizia Longobardi

A.A. 2004/2005

V appello – 22 settembre 2005

Esercizio 1. Sia B un campo e si consideri l'usuale B-spazio vettoriale

$$B^4 = \{(a,b,c)|a,b,c \in B\}.$$

- Si verifichi che l'applicazione

$$\psi : (a,b,c) \in B^3 \to (a+2c, 5b+c, 2a+b) \in B^3$$

  è un B-endomorfismo dello spazio vettoriale B^3 e se ne determinino, in funzione della caratteristica di B, il nucleo $ker\psi$ e l'immagine $Im\psi$, precisandone la dimensione ed una base. Nel caso ψ sia biettiva, se ne determini l'inversa.
- Si verifichi che, qualunque sia la caratteristica di B, il sottospazio $W = \langle(1,0,0),(0,3,1),(1,0,7)\rangle$ è un supplementare di $ker\psi$.
- Nell'ipotesi $carB = 3$ o $carB = 7$, si determinino un supplementare di $ker\psi$ ed uno di $Im\psi$, precisando se ne esiste uno comune, e se $ker\psi$ e $Im\psi$ sono tra loro supplementari.
- Nell'ipotesi $carB = 7$, si verifichi che la posizione $\varphi((a,b,c)+ker\psi) = a-b-c$ definisce un'applicazione φ di $B^3/ker\psi$ in B e che tale applicazione è un epimorfismo di B-spazi vettoriali.

Esercizio 2. Sia p un primo e si consideri il polinomio

$$f(x) = 25x^5 + x^4 + 13 \in Z_p[x].$$

Distinguendo i casi casi:

$$p = 2,\ \ p = 3,\ \ p = 5,\ \ p = 13$$

(I) si decomponga $f(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili di $Z_p[x]$;

(II) posto $J = (f(x))$, dell'anello $Z_p[x]/J$ si caratterizzino gli elementi invertibili, i divisori dello zero, gli elementi nilpotenti;

(III) si determini un campo di spezzamento E di $f(x)$ rispetto a Z_p, precisandone l'ordine, il grado $|E : Z_p|$ ed una Z_p–base.

(IV) Si giustifichi perchè, se $g(x) \in Z_p[x]$ è un qualunque polinomio di III grado irriducibile in $Z_p[x]$, allora il campo $Z_p(c)$, con c radice di $g(x)$, è di spezzamento per $g(x)$ rispetto a Z_p.