ALGEBRA II

Prof.ssa Patrizia Longobardi

A.A. 2005/2006

V appello – 20 settembre 2006

Esercizio 1. Siano F un campo e $F^3 = \{(a, b, c)|a, b, c \in F\}$ l'usuale F-spazio vettoriale.

(i) Si considerino i vettori $v_1 = (2, 3, 4)$, $v_2 = (1, 6, 8)$, $v_3 = (0, 9, t)$ ed il sottospazio $W = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ di F^3.

- Si determini il valore di t per cui risulti sempre $dimW < 3$, qualunque sia $carF$, e si precisi tale dimensione in funzione di $carF$.
- Supposto ora $t = -3$, in funzione della caratteristica di F, si studi la dimensione di W e si individui un supplementare di W in F^3.

(ii) Si verifichi che l'applicazione $\varphi : (a, b, c) \in F^3 \to (a + b + c, a + c) \in F^2$ è un F-epimorfismo dello spazio vettoriale F^3 nello spazio vettoriale F^2 e se ne determinimo $\varphi^{-1}(\{(x, y)\})$, qualunque sia $(x, y) \in F^2$, ed il nucleo $Ker\varphi$.

- Si provi che la posizione $\Psi((a, b, c) + Ker\varphi) = (a + c, -b)$ definisce un'applicazione Ψ di $F^3/Ker\varphi$ in F^2, che tale applicazione è un isomorfismo di F-spazi vettoriali, e di essa si determini l'inversa.

Esercizio 2. Sia B un campo e si consideri il polinomio

$$f(x) = 120x^4 + x^3 + 151x^2 + x + 1 \in B[x].$$

Supposto $B = \mathbb{Z}_p$ e distinguendo i casi: $p = 2$, $p = 3$, $p = 5$, $p = 7$,

- si decomponga $f(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili di $\mathbb{Z}_p[x]$;
- posto $J = (f(x))$, dell'anello $\mathbb{Z}_p[x]/J$ si caratterizzino gli elementi invertibili, i divisori dello zero, gli elementi nilpotenti;
- si determini un campo di spezzamento E di $f(x)$ rispetto a $\mathbb{Z}_p$, precisandone l'ordine, il grado $|E : \mathbb{Z}_p|$ e una $\mathbb{Z}_p$-base.