

ALGEBRA II

PROF.SSA PATRIZIA LONGOBARDI

A.A. 2006/2007

V APPELLO 12 SETTEMBRE 2007

Esercizio 1. Siano F un campo e $F^3 = \{(a, b, c) | a, b, c \in F\}$ l'usuale F -spazio vettoriale.

- Si considerino i vettori $v_1 = (4, 5, 3)$, $v_2 = (5, 1, 2)$, $v_3 = (5, 1, 9)$ ed il sottospazio $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ di F^3 .
- Si determini, in funzione di $\text{car}F$, la dimensione di V .
- Posto $U = \langle (10, 20, 30), (0, 15, 25) \rangle$, si determinino i valori di $\text{car}F$ per cui U risulti supplementare di V .
- Supposto $\text{car}F = 2$, si verifichi che la posizione

$$\varphi((a, b, c) + U) = (a, b - c)$$

definisce un'applicazione φ di F^3/U in F^2 , che tale applicazione è un isomorfismo di F -spazi vettoriali, e di essa si determini l'inversa.

Esercizio 2. Sia B un campo e si consideri il polinomio

$$f(x) = 91x^6 + 106x^3 + 141x + 1 \in B[x].$$

Supposto $B = \mathbb{Z}_p$ e distinguendo i casi casi:

$$p = 2, \quad p = 3, \quad p = 5, \quad p = 7,$$

- si decomponga $f(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili di $\mathbb{Z}_p[x]$;
- posto $J = (f(x))$, dell'anello $\mathbb{Z}_p[x]/J$ si caratterizzino gli elementi invertibili, i divisori dello zero, gli elementi nilpotenti;
- si determini un campo di spezzamento E di $f(x)$ rispetto a \mathbb{Z}_p , precisandone l'ordine, il grado $[E : \mathbb{Z}_p]$ ed una \mathbb{Z}_p -base.