

# ALGEBRA II

PROF.SSA PATRIZIA LONGOBARDI

A.A. 2007/2008

V APPELLO – 17 SETTEMBRE 2008

**Esercizio 1.** - Sia  $F$  un campo e si consideri l'usuale  $F$ -spazio vettoriale  $F^3 = \{(a, b, c) | a, b, c \in F\}$ . Con  $n \in \mathbb{Z}$  e  $1_F$  unità di  $F$ , si considerino i vettori  $v_1 = (2, 7, -1)$ ,  $v_2 = (4, 5, n1_F)$ ,  $v_3 = (6, 3, 1)$  ed il sottospazio  $W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$  di  $F^3$ .

- Si determini il valore di  $n$  per cui la dimensione di  $W$  è sempre minore di 3 e si precisi tale dimensione.
- Si discuta poi la dimensione di  $W$  in funzione della caratteristica di  $F$  e di  $n$ .
- Posto  $U = \langle v_1, v_3 \rangle = \langle (2, 7, -1), (6, 3, 1) \rangle$ , si precisi la dimensione di  $U$  in funzione della caratteristica di  $F$  e se ne descrivano gli elementi. Si provi poi che la posizione  $\varphi((a, b, c) + U) := -5a + 4b + 18c$  definisce un' applicazione  $\varphi$  di  $F^3/U$  in  $F$ , che tale applicazione è un omomorfismo di  $F$ -spazi vettoriali e, se biiettivo, se ne determini l'inverso.

**Esercizio 2.** Si consideri il polinomio

$$f(x) = 15x^5 - 33x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 25x - 21 \in \mathbb{Z}_p[x].$$

- (I) Si determinino:
- il valore di  $p$  per cui risulti 1 radice di  $f(x)$  ;
  - il valore di  $p$  per cui risulti  $-1$  radice di  $f(x)$  ;
  - i valori di  $p$  per cui risulti 3 radice di  $f(x)$  .
- (II) Distinguendo i casi:  $p = 2$  ,  $p = 3$  ,  $p = 5$  ,  $p = 7$  ,
- si decomponga  $f(x)$  nel prodotto di fattori irriducibili di  $\mathbb{Z}_p[x]$  ;
  - si determini di  $f(x)$  un campo di spezzamento  $E$  rispetto a  $\mathbb{Z}_p$  , precisandone l'ordine, il grado  $|E : \mathbb{Z}_p|$  e due  $\mathbb{Z}_p$ -basi;
  - posto  $J = (f(x))$ , dell'anello  $\mathbb{Z}_p[x]/J$  si caratterizzino gli elementi invertibili, i divisori dello zero, gli elementi nilpotenti.
- (III) Supposto  $p = 2$  , si dica se gli anelli  $\mathbb{Z}_2[x]/(f(x))$  e  $\mathbb{Z}_3$  sono isomorfi e, qualora lo siano, si costruisca un isomorfismo tra di essi.