ALGEBRA II

Prof.ssa Patrizia Longobardi

A.A. 2008/2009

V appello - 15 settembre 2009

Esercizio 1. - Sia F un campo e si consideri lusuale F-spazio vettoriale $F^3 = \{(a, b, c)|a, b, c \in F\}$. Con $k \in F$ si considerino i vettori $v_1 = (3, 2, 6)$, $v_2 = (4, 5, 8)$ e $v_3 = (0, 1, k)$ ed il sottospazio $W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ di F^3 .

- In funzione di k e della caratteristica di F: si discuta la dimensione di W, si individuino due basi di W e si determini un supplementare V di W in F^3, in particolare se ne individui uno nel caso $dimW < 3$ che sia indipendente da k e $carF$.
- Con $h \in F$, si precisi per quali valori di h esiste un F-omomorfismo ϕ di F^3 in F tale che $\phi(v_1) = 1$, $\phi(v_2) = h$, $\phi(v_3) = 0$.
- Posto $U = \langle v_1, v_2 \rangle = \langle (3, 2, 6), (4, 5, 8) \rangle$, si descrivano gli elementi di U e se ne determini la dimensione. Si precisi quando la posizione $\psi((a, b, c) + U) = a + 4b - 3c$ definisce un'applicazione ψ di F^3/U in F e si provi che in tal caso l' applicazione è un omomorfismo di F-spazi vettoriali, precisando anche se è iniettivo e se è suriettivo.

Esercizio 2. - Si consideri il polinomio

$$f(x) = x^5 + 21x^4 + 105x^3 + x^2 + 91 \in \ Z_p[x].$$

Distinguendo i casi: $p = 2$, $p = 3$, $p = 5$, $p = 7$,

(I) si decomponga $f(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili di $\mathbb{Z}_p[x]$;

(II) si determini di $f(x)$ un campo di spezzamento E rispetto a $\mathbb{Z}_p$, precisandone l' ordine, il grado $|E : \mathbb{Z}_p|$ e due $\mathbb{Z}_p$-basi. In particolare si giustifichi perchè nel caso $p = 5$ si ha $|E : \mathbb{Z}_5| = 6$.