ALGEBRA II

Prof.ssa Patrizia Longobardi

A.A. 2009/2010

V appello - 15 settembre 2010

Esercizio 1. - Sia F un campo e si consideri l' usuale F-spazio vettoriale $F^4 = \{(a,b,c,d) | a,b,c,d \in F\}$. Con $h,k \in F$, si considerino i vettori $v_1 = (1,2,4,4)$, $v_2 = (10,5,7,h)$ e $v_3 = (4,k,6,8)$, $v_4 = (9,0,11,3)$ ed i sottospazi $W = \langle v_1, v_2 \rangle$ e $V = \langle v_3, v_4 \rangle$ di F^4 .

- In funzione di h, di k e della caratteristica di F: si discutano la dimensione di W e quella di V; si determinino un supplementare di W e un supplementare di V.
- Posto $U = \langle v_1, v_4 \rangle = \langle (1,2,4,4), (9,0,11,3) \rangle$, si descrivano gli elementi di U e si determini la dimensione di U; si dimostri poi che la posizione $\psi((a,b,c,d) + U) = 2a - 5b - 3c + 5d$ definisce un'applicazione ψ di F^4/U in F, provando poi che in tal caso l'applicazione è un omomorfismo di F-spazi vettoriali, e studiando quando è iniettivo, quando è suriettivo, e in caso di isomorfismo, individuandone l'inverso.

Esercizio 2. - Si consideri il polinomio

$$f(x) = 105x^6 + 34x^5 + x^4 + 10x^3 + 7 \in \mathbb{Z}_p[x]$$

Distinguendo i casi: $p = 2$, $p = 3$, $p = 5$, $p = 7$,

(I) si decomponga $f(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili di $\mathbb{Z}_p[x]$;

(II) si determini di $f(x)$ un campo di spezzamento E rispetto a $\mathbb{Z}_p$, precisandone l' ordine, il grado $|E : \mathbb{Z}_p|$ e due $\mathbb{Z}_p$-basi;

(III) posto $J = (f(x))$, dell'anello $\mathbb{Z}_p[x]/J$ si caratterizzino gli elementi invertibili, i divisori dello zero, gli elementi nilpotenti. Si precisi per quali valori di $p \in \{2,3,5,7\}$ il laterale $(x+1) + J$ è invertibile nell'anello $\mathbb{Z}_p[x]/J$ e se ne determini l'inverso. La stessa cosa per il laterale $(x+3) + J$.