ALGEBRA II

Prof.ssa Patrizia Longobardi

A.A. 2010/20111

V appello - 20 settembre 2011

Esercizio 1. - Sia F un campo e si consideri l' usuale F-spazio vettoriale $F^4 = \{(a,b,c,d)|a,b,c,d \in F\}$. Con $h,k \in F$, si considerino i vettori $v_1 = (2,2,5,6)$, $v_2 = (h,1,0,3)$ e $v_3 = (3,2,2,k)$, $v_4 = (1,1,1,0)$, $v_5 = (0,3,5,9)$ ed i sottospazi $W = \langle v_1, v_2 \rangle$ e $V = \langle v_3, v_4, v_5 \rangle$ di F^4 .

- In funzione di h, di k e della caratteristica di F: si discutano la dimensione di W e quella di V; si individui quando i sottospazi W e V sono supplementari.
- Posto $U = \langle v_1, v_4 \rangle = \langle (2,2,5,6),(1,1,1,0) \rangle$, si descrivano gli elementi di U e, in funzione della caratteristica di F: si determini la dimensione di U; si determini l'unico valore di $carF$ per cui la posizione $\psi((a,b,c,d)+U) = (c-a, 3b-d, d)$ definisce un'applicazione ψ di F^4/U in F^3, e si provi poi che in tal caso l'applicazione è un omomorfismo di F-spazi vettoriali, non iniettivo né suriettivo.

Esercizio 2. - Si consideri, con $\beta \in \mathbb{Z}_p$, il polinomio

$$f_\beta(x) = 7x^5 + 6x^4 + \beta x + 5 \in \mathbb{Z}_p[x]$$

Al variare di $\beta \in \mathbb{Z}_p$ e distinguendo i casi: $p = 2$, $p = 3$, $p = 5$

(I) si decomponga $f_\beta(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili di $\mathbb{Z}_p[x]$;

(II) si determini di $f_\beta(x)$ un campo di spezzamento E rispetto a $\mathbb{Z}_p$, precisandone l' ordine, il grado $|E : \mathbb{Z}_p|$ e due $\mathbb{Z}_p$-basi;

Posto $J = (f_\beta(x))$ e $p = 2$, al variare di β in $\mathbb{Z}_p$ si studi il quoziente $\mathbb{Z}_p[x]/J$.