ALGEBRA II

V Appello - 18 settembre 2013

A.A. 2012/2013

1 - Sia F un campo e si consideri l'usuale F-spazio vettoriale

$$F^3 = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in F\}.$$

Con $h, k \in F$, si considerino i vettori $v_1 = (1, h, 4)$, $v_2 = (7, 0, 6)$, $v_3 = (4, 0, 5)$, $v_4 = (8, k, 2)$ ed i sottospazi $W = \langle v_1, v_2 \rangle$ e $V = \langle v_3, v_4 \rangle$ di F^3 .

(I) In funzione di h, di k e della caratteristica di F:

- si discutano la dimensione di W e la dimensione di V;
- si determinino un supplementare di W e un supplementare di V;
- si individui quando il sottospazio $W + V$ coincide con F^3 e si precisi se e quando tale somma è diretta.

(II) Posto $U = \langle v_2, v_3 \rangle = \langle (7, 0, 6), (4, 0, 5) \rangle$, si descrivano gli elementi di U e, in funzione della caratteristica di F:

- si determini la dimensione di U;
- si verifichi quando la posizione $\psi((a, b, c) + U) = (a - 3c, b)$ definisce un'applicazione ψ di F^3/U in F^2 e in tal caso si provi che tale applicazione è un isomorfismo di F-spazi vettoriali, precisandone anche l'inversa.

2 - Si consideri il polinomio

$$f(x) = x^6 + 4x^5 + 6x^4 + 10x^3 + x + 2 \in \mathbb{Z}_p[x].$$

(I) Si determini per quale primo p il polinomio $f(x)$ è divisibile per $h(x) = x^3 + 2x + 2$.

(II) Distinguendo i casi: $p = 2$, $p = 3$, $p = 5$,

(i) si decomponga $f(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili di $\mathbb{Z}_p[x]$;

(ii) si determini di $f(x)$ un campo di spezzamento E rispetto a $\mathbb{Z}_p$, precisandone l'ordine, il grado $|E : \mathbb{Z}_p|$ e due $\mathbb{Z}_p$-basi;

(III) si giustifichi perché $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ non è mai divisibile per $g(x) = x^4 + x^3 + \beta \in \mathbb{Z}_p[x]$, qualunque siano $p \in \mathcal{P}$ e $\beta \in \mathbb{Z}_p$.